1版

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ３０ 年　 ５ 月 ２８ 日現在

機関番号：１４５０１

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2014～2017

課題番号：２６４０００８７

研究課題名（和文）特異点論の深化と低次元幾何学

研究課題名（英文）Deepening singularity theory and low dimensional geometry

研究代表者

佐治　健太郎（Saji, Kentaro）

神戸大学・理学研究科・准教授

研究者番号：７０４５１４３２

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,700,000円

研究成果の概要（和文）：特異点論の深化に関して、定義域と像域の次元が異なる場合のモラン写像のわかりやすい判定法を与えた。また、判定法を用いてモラン写像芽の定義域と像域の連続変形のみで移り合うもの達の数を決定した。
低次元幾何学に関して、特異点の個数と特異点集合のオイラー数に関する公式をベクトル束の束準同型に関する公式に拡張した。また、カスプ辺とスワローテイルに対して、像域の等長座標変換のみを用いた特異点の標準形を作り、そこに現れる低次のモジュライの微分幾何的意味を明らかにした。また、特異点の近傍における漸近線と特性線のジェネリックな振る舞いを決定した。微分方程式の解曲面や、カスプ辺を近似する曲面の特異点も調べた。

研究成果の概要（英文）：For deepening singularity theory, I obtained criteria for Morin singularities for the case of the dimension of the source space and the target space is not the same. By using criteria for Morin singularities, I gave the number of right-left isotopy classes. For low dimensional geometry, I generalized a formula for the number of singular points and the Euler characteristic to singularities of bundle homomorphisms. I also gave a normal form by only using isometric coordinate transformation of the target space for cuspidal edges and swallowtails. Moreover, I clarified the differential geometric meanings for modulus appeared in the lower degree terms. By using that form, I obtained generic configurations of asymptotic lines and characteristic lines of that singularities. I also studied singularities of solution surfaces of certain differential equation and that of surfaces which approximate the cuspidal edge.

研究分野：微分トポロジー

キーワード：特異点　カスプ辺　接触構造　曲率

１．研究開始当初の背景

近年、部分多様体の微分幾何学、接触幾何学、微分方程式の解、特異点を持つ図形の幾何学などにあらわれる特異性を微分可能写像の特異点としてとらえ、特異点理論を利用して研究する手法が確立しており、これらの研究によって多くの結果が得られているが、特異点論の使い勝手と応用の研究成果に関してまだ課題がある状況であった。

この状況に鑑み、高度に発達した特異点論を低次元幾何学の研究に応用することを念頭に、特異点論を深化・発展させて、それを用いて新たな低次元幾何学の研究を進めるという本研究課題が重要であった。

２．研究の目的

特異点論はホイットニー、トムによって創始され、マザーによって'70 年代前半までに整備された。そしてその後もブルースらによる完全横断の理論などにより、分類についてはほぼ満足のいく結果が得られるなどその後も発展が続いている。この特異点論を応用しやすい形に整備することが第一の目的であった。

そしてこれらを使って特異点を持つ場合の曲面論・(特異点を持たない)曲面の特別な点・低次元トポロジー・微分方程式の特異性を研究することが第二の目的であった。

３．研究の方法

特異点論の深化に関してはまずは必要な特異点の判定法をつくる。さらに，写像芽に対して余次元が低い場合に $\A$ 同値と等しくなるような使いやすい同値関係を作り、その同値関係によって写像芽の分類を行うという方法で行う。

特異点をもつ曲面への応用について、まず各特異点に対してマルグランジュの予備定理を使い、ターゲットの空間の等距離写像のみを用いた標準形を作る。こうすると係数はすべて微分幾何学的不変量となるため、その幾何学的意味を明らかにするという方法で研究する。また曲面の射影や、特別な曲線のパラメーター族となっている曲面、曲面の近似等を用いて曲面の特異性を研究する。

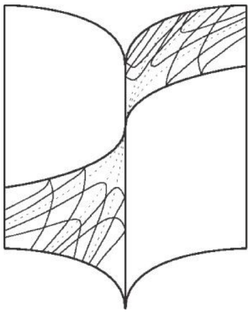
４．研究成果

特異点論の深化について、モラン写像に関する研究を中心に行い、以下の成果を得た。モラン特異点とは、微分可能写像にもっともよくあらわれる特異点である。その判定法は、定義域と像域の次元が同じ場合は与えられていたが、次元が異なる場合は与えられていなかった。判定法は、写像の定義域と像域の微分同相写像に依存しない性質を取り出す必要がある。次元が同じ場合はヤコビ行列式というわかりやすい座標不変量があるため、座標不変な性質を取り出すことができていた。次元が異なる場合はヤコビ行列式に対応する行列式を複数とることにより、判定法を書いた。また、定義域の次元のほうが大きい場合は特異点の標準形に非退化二次式があらわれる。写像の微分の核を生成するベクトル場による微分を用いてそのヘッセ行列に対応する行列を構成し、さらにその核をとることにより、判定法を書いた。また、次元が同じ場合も含めて、写像芽の右左イソトピー同値なる概念を導入した。右左同値であっても右左イソトピー同値とは限らない。モラン写像について、右左イソトピー類を研究し、右左同値類の中の右左イソトピー類の数を次のように決定した。同じ次元(n 次元)のユークリッド空間の間のモラン特異点芽の右左イソトピー類の個数は n が 4 で割り切れるときは 4 個、n が 4 で割り切れないときは 2 個である。さらに、2 個を識別する不変量は、3 種類の場合で全て異なる。実際、n が 4 で割って 1 余る場合はモラン写像を開折とみなしたときに普遍となるかどうかの識別子の符号であり、4 で割って 2 余る場合はモラン特異点の深さをあらわす識別子の符号であり、4 で割って 3 余る場合は上記 2 つの積である。さらに、同様の結果を定義域と像行きが異なる場合にも得た。

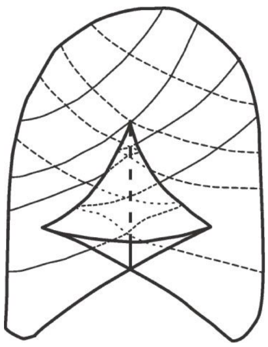
微分幾何学への応用について、以下の成果を得た。

まず、波面の微分幾何的性質を調べた。カスプ辺に対して、像域の等距離同型写像のみを用いた標準形を作った。像域の等距離同型写像のみを用いていることから、この標準形にあらわれる係数は全て微分幾何的不変量である。この不変量の幾何的意味と内在性を明らかにした。また、境界をもつ多様体からのカスプ辺に対しても同様の標準形を作り、類似の結果を得た。この標準形の利点は与えられた特異点のある決まった次数の項の可能性が全て尽くされているところにある。従って、低次の項の情報のみから決まる特異点の性質を全て決定することができる。この性質を用いて、カスプ辺の近傍での漸近線と特性線のジェネリックな振る舞いも決定した。漸近線と特性線は二重方向場と呼ばれる微分方程式の解として記述できる。二重方向場の特異点近傍での挙動は最もジェネリックなものはカスプのパラメーター族であり、その次がダビドフによって分類された折った鞍、折った結節点、折った焦点の３種類である。しかしカスプ辺の近傍ではダビドフの３種類はあらわれず、代わりに、判別式と呼ばれる関数が特異点を持つものがジェネリックにあらわれることがわかった。下にある図は、判別式が特異点を持つ場合の漸近線のジェネリックな模様の一つをカスプ辺上に描いたものである。

一方、スワローテイル特異点に対しても像域の等距離同型写像のみを用いた標準形を作った。カスプ辺の場合と同様に、係数は微分幾何的不変量となるが、既存のスワローテイルの不変量との関係を調べた。また近傍での漸近線と特性線のジェネリックな振る舞



いも調べ、この場合はカスプ辺とは逆に、ジェネリックにダビドフの３種類があらわれることがわかった。下図は、漸近線が折った鞍である場合の図をスワローテイル上に描いたものである。



カスプ辺の不変量に関しては他にガウス曲率と平均曲率の振る舞いを調べ、これらの曲率の発散性と関係している不変量を明らかにした。また、カスプ辺を近似する曲面についても調べた。カスプ辺には単位法線ベクトルがあるので、それを用いてカスプ辺に沿った枠を定義し、その枠のフルネ・セレ型の公式で定まる不変量とカスプ辺の既知の不変量との関係を明らかにした。また、その枠からの高さをはかる関数を用いてカスプ辺の近似線織曲面を構成し、その曲面の特異点の条件ともとのカスプ辺の不変量の関係を調べた。また、特異点をもつ曲面に関して、射影と切り口を考え、ケンデリンク型の定理を示した。切り口や射影が特異点を持つ場合があるため、平面曲線の特異点の性質も調べた。

他に関連する研究を行い、次の成果を得た。多様体間のモラン特異点のみをもつ写像に関して、特異点の個数、特異点集合のオイラー数の関係式は知られていたが、これを接束から同じ階数のベクトル束への束準同型写像の特異点に関する式に拡張した。

超幾何微分方程式の解から作られるドシッター空間内の平坦曲面に対して、特異点の条件を超幾何微分方程式を定義する関数の関係式で書いた。

空間的平均曲率一定曲面が折り目特異点を保つ場合の随伴曲面の特異点を調べた。

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 16 件）

全て査読あり

●Kentaro Saji, On pairs of geometric foliations on a cuspidal edge, Adv. Stud. Pure Math. 掲載決定.

●Atsufumi Honda; Miyuki Koiso; Kentaro Saji, Fold singularities on spacelike CMC surfaces in Lorentz-Minkowski space, Hokkaido Math. J. 掲載決定.

● Kentaro Saji, Normal form of the swallowtail and its applications, Internat. J. Math. 掲載決定.

● Martins, Luciana F.; Saji, Kentaro Geometry of cuspidal edges with boundary. Topology Appl. 234 (2018), 209--219.

●Kokubu, Masatoshi; Rossman, Wayne; Saji, Kentaro; Umehara, Masaaki; Yamada, Kotaro Addendum: Singularities of flat fronts in hyperbolic space, Pacific J. Math. 294 (2018), no. 2, 505--509.

● Saji, Kentaro; Umehara, Masaaki; Yamada, Kotaro An index formula for a bundle homomorphism of the tangent bundle into a vector bundle of the same rank, and its applications. J. Math. Soc. Japan 69 (2017), no. 1, 417--457.

● Izumiya, Shyuichi; Saji, Kentaro; Takeuchi, Nobuko Flat surfaces along cuspidal edges. J. Singul. 16 (2017), 73--100.

● Martins, Luciana; Saji, Kekntaro; Umehara, Masaaki; Yamada, Kotaro, Behavior of Gaussian curvature and mean curvature near non-degenerate singular points on wave fronts. Geometry and topology of manifolds, 247--281, Springer Proc. Math. Stat., 154, Springer, [Tokyo], 2016.

● Saji, Kentaro Isotopy of Morin singularities. Houston J. Math. 42 (2016), no. 2, 499--519.

● Martins, Luciana de Fátima; Saji, Kentaro Geometric invariants of cuspidal edges. Canad. J. Math. 68 (2016), no. 2, 445--462.

● Saji, Kentaro Criteria for Morin singularities for maps into lower dimensions, and applications. Real and complex singularities, 315--336, Contemp. Math., 675, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2016.

●Fukui, Toshizumi; Hasegawa, Masaru; Saji, Kentaro Extensions of Koenderink's formula. J. Gökova Geom. Topol. GGT 10 (2016), 42--59.

● Saji, Kentaro Criteria for Morin singularities into higher dimensions. Theory of singularities of smooth mappings and around it, 205--224, RIMS Kôkyûroku Bessatsu, B55, Res. Inst. Math. Sci. (RIMS), Kyoto, 2016.

●Hasegawa, Masaru; Honda, Atsufumi; Naokawa, Kosuke; Saji, Kentaro; Umehara, Masaaki; Yamada, Kotaro. Intrinsic properties of surfaces with singularities. Internat. J. Math. 26 (2015), no. 4, 1540008, 34 pp.
●Fujimori, Shoichi; Noro, Masayuki; Saji, Kentaro; Sasaki, Takeshi; Yoshida, Masaaki. Schwarz maps for the hypergeometric differential equation. Internat. J. Math. 26 (2015), no. 6, 1541002, 31 pp.
● Saji, Kentaro; Yildirim, Handan. Legendrian dual surfaces in hyperbolic 3-space. Ann. Polon. Math. 115 (2015), no. 3, 241--261.

〔学会発表〕(計 12 件)

●佐治健太郎，スワローテイルのノーマルフォームとその応用，2017/06/01，微分幾何学と特異点論の応用，岩手医科大学創立６０周年記念館.
●佐治健太郎，ランフォイドカスプの不変量とその応用，山口佳三先生退職記念研究集会，2017 年 7 月 14 日，神戸大学理学部.
●Kentaro Saji，Normal form of swallowtail and its applications, Geometric and Algebraic Singularity Theory，2017 年 9 月 15 日，The Mathematical Research and Conference Center Bedlewo, Poland.
●佐治健太郎，ベクトル場と関数の接触とその応用，特異点論とその応用，2018 年 2 月 20 日，北海道大学学術交流会館、理学部.
●佐治健太郎，与えられた非有界平均曲率をもつ特異点付き回転面，幾何学と特異点２０１８，2018 年 3 月 2 日，東京学芸大学自然科学１号館.
● Kentaro Saji, Singular surfaces of revolution with prescribed unbounded mean curvature，第７回神戸特異点研究会，2018 年 3 月 22 日，兵庫教育大学ハーバーランドキャンパス.
●Kentaro Saji, Invariants of cuspidal edges and flat surfaces, 2016/07/27, 14th International Workshop on Real and Complex Singularities, ICMC, Sao Carlos - SP, Brazil.
●Kentaro Saji, Geometric foliations of fronts，2017 年 3 月 17 日(金)，微分幾何学と可積分系，大阪市立大学.
● Kentaro Saji, On pairs of geometric foliations on a cuspidal edge, 2015/09/10, Geometric Singularity Theory, Banach Center, Warsaw.
●佐治健太郎，ファイバー型モラン特異点の判定法とその応用，2015/11/20，４次元トポロジー，大阪市立大学理学部 E 棟 4 階 E408.
●佐治健太郎，可微分写像の特異点の判定法とその応用，2015/8/9，トポロジーシンポジウム，名古屋工業大学 51 号館 1 階 5111.
●佐治健太郎，誰にでもできる特異点の判定法，2016/3/12，Encounter with Mathematics，中央大学理工学部 5 号館.

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕

○出願状況（計 0 件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

○取得状況（計 0 件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等
研究費と得られた主な成果
http://www.math.kobe-u.ac.jp/HOME/saji/math/kaken.html

６．研究組織
(1)研究代表者
佐治健太郎（Kentaro Saji）
神戸大学・大学院理学研究科・准教授
研究者番号：70451432

(2)研究分担者
（　　）

研究者番号：

(3)連携研究者
（　　）

研究者番号：

(4)研究協力者
（　　）