

平成30年6月27日現在

機関番号：16301

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2014～2017

課題番号：26400091

研究課題名(和文) コンパクト型可換群の構造及びMarkov稠密性を実現する群位相の導入の研究

研究課題名(英文) Structure of compact-like abelian groups and realization of Markov density by a group topology

研究代表者

D・B Shakhmatov (SHAKHMATOV, Dmitri)

愛媛大学・理工学研究科(理学系)・教授

研究者番号：90253294

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,700,000円

研究成果の概要(和文)：1945年にMarkovによる提起された連結位相群の代数的な構造に関する予想が可換群における成り立つことを証明した。small subgroup generating propertyをもつ可換位相群の代数的な構造を解明した(Comfort-Gouldの問題の完全解決)。整数群の連続体濃度の乗は回帰的位相群でない可算自由閉部分群を含むことを示した。selectively sequentially pseudocompactな空間の概念を導入し、このクラスの性質を研究した。弱疑コンパクト全有界位相群が疑コンパクトであることを示した(Tkachenkoの問題の肯定的解決)。

研究成果の概要(英文)：We confirm 70 years old conjecture of Markov concerning the algebraic structure of connected groups in the class of abelian groups. Answering a question of Comfort and Gould, we completely describe the algebraic structure of abelian topological groups having the small subgroup generating property. We construct a countable free closed non-relexive subgroup in the product of continuum many integers. We introduce a notion of selectively sequentially pseudocompact space and study basic properties of this new subclass of pseudocompact spaces. Answering a question of Tkachenko, we prove that a weakly pseudocompact precompact group is pseudocompact.

研究分野：位相群論

キーワード：位相群 トポロジー 代数学 コンパクト 連結性 小部分群 疑コンパクト

1. 研究開始当初の背景

(1) Choquet により、Hausdorff 位相群 G が minimal であるとは G から Hausdorff 位相群へのすべての全単射及び準同型写像は開写像であること。コンパクト群は minimal である。Prodanov, Stoyanov (1984) は minimal 可換群の完備化はコンパクト群であることを証明した。Kaplansky, Harrison, Hulanicki (1950s) はコンパクト群位相を導入できる可換群の代数的構造を解明した。Dikranjan, Shakhmatov は疑コンパクト群位相をもつ可換群の特徴づけを得た。可算コンパクト群位相を導入できる可換群の代数的構造は不明である。

(2) Markov (1946) により、群 G 上のある Hausdorff 群位相での稠密な部分集合を G の稠密可能な部分集合 (potentially dense 集合) と呼ぶ。Markov (1946) は稠密可能な部分集合の特徴付け問題を提出し、可算群の場合はこの問題を解決した。Tkachenko, Yaschenko (2002) はねじれなし可換群の稠密可能な部分集合の特徴付けを得た。Dikranjan, Shakhmatov (2010) は Markov の問題を可算部分集合の場合及び各種の非可算部分集合の場合は解決した。

(3) S を可換群 G の部分集合とする。Markov (1946) による、ある元 $g \in G$ と自然数 n が存在して、 S は方程式 $nx=g$ をみたす G の要素 x の全体集合と一致するとき、 S を G の基本代数的集合と呼び、有限個の基本代数的集合の和集合を G の代数的集合という。 S を含む代数的集合全体の族の共通部分を S の G での代数的閉包という。

(4) コンパクト群 G の部分集合 X が G の単位元 1 に収束する超点列であるとは X は G の閉集合で $X - \{1\}$ は離散集合であることをいう。 1 に収束する超点列 X が G の稠密部分群を生成するとき、 X を G の suitable set という。この概念は離散群の階数 (rank) の位相群のアナログとして Hofmann, Morris (1990) による導入された。位相群 G の suitable set を G の最小の位相的生成集合として考えられる。Hofmann, Morris (1990) はすべてのコンパクト群が suitable set をもつことを証明した。

2. 研究の目的

(1) 可換群上のコンパクト型群位相が存在するための必要十分条件を得ること。

(2) 可換群での稠密可能な部分集合の特徴付けを得ること。(Markov の稠密可能な部分集合問題)

(3) 可換群の部分集合の代数的閉包をあ

るコンパクト型群位相での近似を得ること。

(4) 可換位相群の各種の閉包作用素に関する稠密な部分集合の位相的性質を解明すること。

3. 研究の方法

(1) 海外共同研究者と日常的に電子メールで意見交換を行った。

(2) 海外共同研究者と年 1 回相互に訪問し、共同研究を実施した。

4. 研究成果

(1) 群 G の部分集合 S が G 上のすべての群位相で閉集合であるとき、 S を G の無条件閉集合とよぶ。連結位相群 G のすべての真部分群 H に対して G における H の左剰余類全体の集合 G/H の濃度は連続体濃度 c 以上であることが知られている。従って、「位相群 G の真部分群 H が無条件閉集合であるならば、 G における H の左剰余類全体の集合 G/H の濃度は連続体濃度 c 以上である」ことは、群 G 上の連結群位相の存在ための必要条件である。このことから、Markov (1945) は問題「この条件は連結群位相の存在ための十分条件でもあるか」を提起した。Pestov (1988) と Remus (1990) は Markov の問題を否定的に解決したが、反例になっていた群はすべて非可換であった。これを受け、Remus (1990) は問題「Markov の予想は可換群に対して成り立つか」を提起した。

Kirku (1990) は、有界な可換群 G に対して Markov の問題を肯定的に解決した。本研究では有界でない可換群 G に対しても Markov の予想が成り立つことを示した。その結果より、連結群位相を導入可能な可換群の代数的構造が明確になった。

(2) 位相群 G が small subgroup generating property (SSGP) をもつとは、 G の単位元のすべての開近傍 U に対して、 U に含まれる G の部分群全体の族が G の稠密部分群を生成することである。この概念は Gould (2009) によって導入され、Comfort, Gould (2015) により研究された。

可換群 G の階数 (rank) を $r(G)$ で表すとき、基数 $r_d(G) = \min\{r(nG) : n \in \mathbb{N}\}$ を G の可除階数 (divisible rank) とよぶ。

無限可除階数をもつ可換群には、SSGP をもつ群位相を導入できることを証明した。

正かつ有限な可除階数をもつ可換群 G に対して、SSGP をもつ G 上の群位相が存在するための必要十分条件を得た。

可除階数 0 の可換群は有界である。また、有界な可換群に対して SSGP をもつ群位相が導入可能であるための必要十分条件は、Comfort-Gould, Gabrielyan により知られている。従って、上の結果は Comfort, Gould (2015) の問題の可換群における完全解決である。即ち、との結果より、SSGP をもつ群位相を導入可能な可換群の代数的構造が明確になった。

(3) 整数群の可算個の直積群を Baer-Specker 群とよぶ。Baer-Specker 群から整数群への準同型写像全体の群に各点収束位相を導入したものを G で表す。本研究で次を得た。

G のコンパクト部分集合は有限集合のみであることを示した。

の結果を用いて G の 2 回双対群は離散群であることを示した。 G が離散でないことより、 G は回帰的位相群でないことを得た。

G は整数離散群 Z の連続体濃度の積 $Z^{\mathbb{C}}$ の可算自由閉部分群であるため、 $Z^{\mathbb{C}}$ の可算閉部分群は必ずしも回帰的位相群であるとは限らないことを導いた。これによって Galindo, Recorder-Nunez, Tkachenko (2011) の問題を解決した。

G は離散群の射影極限であるため、その極限は回帰的位相群になるとは限らないことを得た。これは Negreontis (1971) の論文の一つの定理が成立しないことを指摘している。

(4) 可換位相群 G の部分集合 A に対して、次の 3 つの概念(無条件コーシー総和可能, 無条件総和可能, 位相的独立)を導入した。

A が無条件コーシー総和可能であるとは、 0 の任意の開近傍 U に対し、有限集合 F が存在して、 $A-F$ が生成する G の部分群は U の部分集合であることをいう。

A が無条件総和可能であるとは、すべての整数値関数 $z: A \rightarrow Z$ に対して、 G のある元 g が存在して、 G の添字集合 $\{z(a) : a \in A\}$ が g に収束する(すなわち、 0 の任意の開近傍 U に対し、有限集合 F が存在して、 $\{z(a) : a \in A-F\} \subset g+U$ が成り立つ)ことである。

$A \neq \emptyset$ が位相的独立であるとは、 0 の任意の開近傍 W に対し、 0 の開近傍 U が存在して、 A の任意の有限部分集合 F と任意の添字集合 $\{z_a : a \in F\}$ に対し、「 $\{z_a : a \in F\} \subset U$ ならばすべての $a \in F$ に対し、 $z_a \in W$ 」が成り立つことをいう。

これらの概念を用いて、次の結果を得た。

k を無限基数とする。可換位相群 G が k

個の自明でない位相群の直積(直和)と同型な部分群をもつための必要十分条件は、 G が濃度 k をもつ位相的独立な無条件(コーシー)総和可能部分集合を含むことである。

実数体 R を係数体とする線型位相空間 V が可算個の R の直和と同型な部分空間をもつための必要十分条件は、 V が位相的独立な無条件コーシー総和可能無限部分集合を含むことである。

実数体 R を係数体とする線型位相空間 V が可算個の R の直積 $R^{\mathbb{N}}$ と同型な部分空間をもつための必要十分条件は、 0 でない項からなる V の点列 (x_n) が存在し、すべての数列 (r_n) に対し、無限級数 $\sum r_n x_n$ が V のある点に収束することである。

(5) 位相群の族 $\{H_i : i \in I\}$ の直積群 H の部分群 G は「族 $\{H_i : i \in I\}$ の直和で近似化できる」ことを表す 3 つの概念を研究した。また、これらの概念の符号理論との関係を明確にした。

(6) コンパクト群の部分群を全有界位相群とよぶ。次の 3 つのクラスについて、各種の完備性について研究した。

距離空間;

可分距離付可能群の任意の直積;

全有界位相群。

得られた結果を各点収束位相を導入される Tychonoff 空間 X から位相群 G への連続関数全体の群 $C_p(X, G)$ に応用した。

(7) 位相空間 X が疑コンパクトであるとは、 X 上の任意の実数値連続関数が有界であるときをいう。位相空間 Y の部分空間 X が Y で G_{delta} -稠密であるとは、 Y の可算個の開集合の共通部分で表されるすべての空でない集合が X と交わることをいう。Tychonoff 空間 X が疑コンパクトであるための必要十分条件は、 X が自身の Stone-Chech コンパクト化で G_{delta} -稠密であることが知られている。

一方、Tychonoff 空間 X がある自身のコンパクト化で G_{delta} -稠密であるとき、 X を弱疑コンパクト空間という。明らかに、疑コンパクト空間は弱疑コンパクトである。Tkachenko (2015) は「全有界位相群において、この逆が成り立つか」を問題として提起した。

本研究では、弱疑コンパクト全有界位相群が疑コンパクトであることを証明し、Tkachenko の問題を肯定的に解決した。

(8) 位相空間 X の任意の空でない開集合列 (U_n) に対し、点列 (x_n) が密集点をもつように各 U_n から点 $x_n \in U_n$ を選ぶことができ

of the Bohr topology on selective pseudocompactness, arXiv preprint arXiv:1801.09380 [math.GN] (2018), 査読無

D. Shakhmatov, V.H. Yanez, Selectively pseudocompact groups without non-trivial convergent sequences, arXiv preprint arXiv:1704.07740 [math.GN] (2017), 査読無

K. Motooka, D. Shakhmatov, T. Yamauchi, The existence of continuous weak selections and orderability-type properties in products and filter spaces, Topology and its Applications, 232 (2017), 45-60, 査読有

A. Dorantes-Aldama, D. Shakhmatov, Selectively sequentially pseudocompact group topologies on torsion and torsion-free Abelian groups, Topology and its Applications, 230 (2017), 562-577, 査読有

⑨ M. Ferrer, S. Hernández, D. Shakhmatov, Subgroups of direct products closely approximated by direct sums, Forum Mathematicum, 29 (2017), no. 5, 1125-1144, 査読有

A. Dorantes-Aldama, D. Shakhmatov, Completeness and compactness properties in metric spaces, topological groups and function spaces, Topology and its Applications, 226 (2017), 134-164, 査読有

⑩ M. V. Ferrer, S. Hernández, D. Shakhmatov, A countable free closed non-reflexive subgroup of Z^c , Proceedings of the American Mathematical Society, 145 (2017), no. 8, 3599-3605, 査読有

A. Dorantes-Aldama, D. Shakhmatov, Selective sequential pseudocompactness, Topology and its Applications, 222 (2017), 53-69, 査読有

D. Dikranjan, D. Shakhmatov, J. Spěvák, Direct sums and products in topological groups and vector spaces, Journal of Mathematical Analysis and its Applications, 437 (2016), no. 2, 1257-1282, 査読有

D. Dikranjan, D. Shakhmatov, Topological groups with many small subgroups, Topology and its Applications, 200 (2016), 101-132, 査読有

D. Dikranjan, D. Shakhmatov, A complete

solution of Markov's problem on connected group topologies, Advances in Mathematics, 286 (2016), 286-307, 査読有

[学会発表](計 23 件)

D. Shakhmatov, A factorization theorem for weak alpha-favourability, RIMS 共同研究(公開型)「一般位相幾何学の進展と諸問題」, 2017

D. Shakhmatov, V.H. Yanez, The algebraic small subgroup generating property, RIMS 共同研究(公開型)「一般位相幾何学の進展と諸問題」, 2017

D. Shakhmatov, Topological groups which are hard to come by, The 2nd Pan Pacific Conference on Topology and its Applications (国際学会), 2017, 招待講演

D. Shakhmatov, V.H. Yanez, Groups with many small subgroups, The 2nd Pan Pacific Conference on Topology and its Applications (国際学会), 2017

D. Shakhmatov, Compactness-like properties defined by open-point games and maximal almost disjoint families, RIMS 共同研究(公開型)「反復強制法の理論と基数不変量」(国際学会), 2017, 招待講演

D. Shakhmatov, Compactness properties defined by an open-point game, Frontiers of Selection Principles (celebrating the 60th birthday of Marion Scheepers) (国際学会), 2017, 招待講演

D. Shakhmatov, Minimal almost periodic topologies on groups, Alexandroff Topology Seminar at Moscow State University, 2017, 招待講演

A. Dorantes-Aldama, D. Shakhmatov, Compactness properties defined by open-point games, RIMS 共同研究(公開型)「集合論的・幾何学的トポロジーの動向と諸分野との連携」, 2017

D. Shakhmatov, V.H. Yanez, Groups with many small subgroups, RIMS 共同研究(公開型)「集合論的・幾何学的トポロジーの動向と諸分野との連携」, 2017

D. Shakhmatov, Productively Baire completeness and compactness properties, 2016 International Conference of the Honam Mathematical Society (国際学会), Chonbuk National University (Department of Mathematics Education), Jeonju, South Korea, 2016, 招待講演

D. Shakhmatov, Selectively

sequentially pseudocompact group topologies on abelian groups, Twelfth Symposium on General Topology and its Relations to Modern Analysis and Algebra (TOPOSYM 2016) (国際学会), Prague (Czech Republic), 2016

D. Shakhmatov, Selective sequential pseudocompactness in topological spaces and groups, Interdisciplinary Colloquium in Topology (国際学会), University of Navarra, Pamplona (Spain), 2016, 招待講演

D. Shakhmatov, Completeness properties in metric spaces and topological groups, with applications to function spaces, IMAC Topology Workshop (国際学会), Universitat Jaume I, Castellon (Spain), 2016, 招待講演

D. Shakhmatov, New class of pseudocompact spaces containing all sequentially compact spaces, Alexandroff Topology Seminar at Moscow State University, Moscow (Russia), 2016, 招待講演

A. Dorantes-Aldama, D. Shakhmatov, Selective sequential pseudocompactness in topological groups, RIMS 研究集会「集合論的・幾何学的トポロジーとその応用」, 京都大学数理解析研究所(京都府京都市), 2016

A. Dorantes-Aldama, D. Shakhmatov, Completeness properties in topological groups, 2016 年度ジェネラルトポロジーシンポジウム, 筑波大学(つくば市), 2016

D. Shakhmatov, Topological groups with many small subgroups, International Conference on Set-Theoretic Topology and its Applications (Joint with the 50th Symposium of General Topology and 2015 General Topology Symposium) (国際学会), 神奈川大学(神奈川県横浜市), 2016

D. Shakhmatov, Complete solution of Markov's problem on the existence of connected Hausdorff group topologies, International Conference on Topology, Messina 2015 (ICTM2015), On the occasion of Filippo Cammaroto's 65th birthday (国際学会), University of Messina, Messina (Italy), 2015

D. Shakhmatov, Markov's problem on the existence of connected Hausdorff group topologies on abelian groups, Alexandroff Topology Seminar at Moscow State

University (国際学会), Moscow (Russia), 2015, 招待講演

D. Shakhmatov, 任意の可換群上面白い群位相の定めかたについて, RIMS 研究集会「集合論的位相幾何学および幾何学的トポロジーの最近の動向と展望」, 京都大学数理解析研究所(京都府京都市), 2015

⑲ D. Shakhmatov, Minimally almost periodic and connected group topologies on abelian groups, 1st Pan Pacific International Conference on Topology and Applications (PPICTA) (国際学会), Minnan Normal University, Zhangzhou (中国), 2015, 招待講演

⑳ D. Shakhmatov, Compact-like connected group topologies on abelian groups, 第49 回位相空間論シンポジウム, 京都工芸繊維大学松ヶ崎キャンパス, 2014

㉑ D. Shakhmatov, Application of Hartman-Mycielski construction to two characterization problems in topological groups, Workshop on Mathematical Logic on the Occasion of Sakae Fuchino's 60th Birthday, Kobe University, 2014

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕

出願状況(計 0 件)

取得状況(計 0 件)

〔その他〕

ホームページ等

本研究の成果を以下のホームページで公開されている。

<http://www.math.sci.ehime-u.ac.jp/~dima/>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

D.B. Shakhmatov (Dmitri Shakhmatov)

愛媛大学・理工学研究科・教授

研究者番号: 90253294