様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　２ 年　 ６ 月　 ８ 日現在

機関番号：２４４０３
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2014～2019
課題番号：２６４０００９４

研究課題名（和文）多面体積のホモトピー型の研究

研究課題名（英文）Study on the homotopy types of polyhedral products

研究代表者
入江　幸右衛門（Iriye, Kouyemon）

大阪府立大学・理学（系）研究科（研究院）・教授

研究者番号：４０１５１６９１

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,800,000円

研究成果の概要（和文）：　2004年にロシアの研究者が、単体複体から構成されるモーメントアングル複体という空間の構造を解析することにより、単体複体の Golod 性が判定できることを示した。本研究では、上記結果を用いて Golod 性を研究するため、より広くモーメントアングル複体の概念を拡張した多面体積のホモトピー型の決定という問題に取り組んだ。
　特に、Golod 単体複体として知られている殻化可能複体の双対複体に付随したモーメントアングル複体は、懸垂空間とホモトピー同値であることを証明した。また、Golod 単体複体でそれに付随したモーメントアングル複体が懸垂空間とホモトピー同値でないものが存在することを示した。

研究成果の学術的意義や社会的意義
　数学の果たしている社会的役割は、諸科学に言葉と手段を提供することにあります。本研究はトポロジーという分野に属する研究ですが、この分野が生まれてから100年経ってようやく具体的な応用分野が生まれました。それは、トポロジカルデータアナリシスという統計とは全く異なる方法でデータを解析する手段です。
　本研究は、空間内の点のつながりを抽象化したグラフ（ネットワーク図のようなもの）をさらに抽象化した単体複体から構成される図形の研究に関するものです。これは、現在行われているトポロジカルデータアナリシスの方法と類似しており、その方面への応用が期待されています。

研究成果の概要（英文）：In 2004 Baskakov-Buchstaber-Panov showed that it is possible to study Golodness of a simplicial complex through the study of the homotopy type of its moment-angle complex.
We have studied the homotopy types of polyhdedral products, which are a generalization of moment-angle complexes, to study Golodness of a simplicial complex by making use of the result above.
In particular, we showed that the moment-angle complex associated with a dual shellable complex is homotopy equivalent to a suspension space. We also constructed a moment-angle complex associated with a Golod simplicial complex which is not homotopy equivalent to a suspension space.

研究分野：トポロジー

キーワード：単体複体　Golod 性　多面体積　モーメントアングル複体　Massey 積　ホモトピー型

1　研究開始当初の背景

体 $\mathbf{k}$ 上の多項式環 $\mathbf{k}[x_1, \cdots, x_m]$ の剰余環 $R = \mathbf{k}[x_1, \cdots, x_m]/\mathcal{I}$ が Golod であるとは、Tor-algebra $Tor^*_{\mathbf{k}[x_1,\cdots,x_m]}(R, \mathbf{k})$ の積を含めたすべての Massey 積が自明となる事を言う。

$[m] = \{1, 2, \cdots, m\}$ 上の単体複体 K から Stanley-Reisner 環 $\mathbf{k}[K] = \mathbf{k}[x_1, \cdots, x_m]/\mathcal{I}_K$ が構成され、この環の Golod 性が代数学の分野で長く研究されてきた。ここに、

$$\mathcal{I}_K = (x_{i_1} \cdots x_{i_k} \mid \{i_1, i_2, \cdots, i_k\} \notin K)$$

である。一方において、2004 年に Baskakov-Buchstaber-Panov [2] は、$Tor^*_{\mathbf{k}[x_1,\cdots,x_m]}(\mathbf{k}[K], \mathbf{k})$ が K に付随した moment-angle complex Z_K のコホモロジー環 $H^*(Z_K; \mathbf{k})$ と同型であり、higher Massey 積を含めて一致することを示した。これは、単体複体 K の Golod 性が、moment-angle complex Z_K のコホモロジー環を調べることによって分かることを意味する。特に、Z_K が懸垂空間とホモトピー同値ならば、コホモロジー環 $H^*(Z_K; \mathbf{k})$ のすべての Massey 積が消え、K が Golod であることが分かる。実際、Grbić-Theriault [3] は shifted simplicial complex と言われる Golod 単体複体 K に付随する moment-angle complex Z_K は懸垂空間とホモトピー同値であることを示した。

その後、彼らに続く研究が現れない中 Bahri-Bendersky-Cohen-Gitler [1] が、moment-angle complex を拡張した多面体積（polyhedral product）の概念を導入した。これにより、ホモトピー論がこの問題の研究により有効に適用できるようになり、上記 Grbić-Theriault [3] の結果を多面体積の場合に拡張できるかどうかを問題として提示した。そして、この問題は研究代表者達 [4] により肯定的に解決された。

2　研究の目的

本研究は、上記結果を受けて次のような事実を解明する事を目的としてはじめられた。

1. [4] の結果は、dual shellable complex などの良く知られた Golod simplicial complex についても成り立つのか。
2. 代数的方法では調べられなかった Golod 単体複体をたくさん見つけること。
3. 単体複体 K について

$$K \text{ はすべての体 } \mathbf{k} \text{ 上 Golod} \quad \Longleftrightarrow \quad Z_K \text{ は懸垂空間とホモトピー同値}$$

   が成り立つか。

特に、上記 3 については一部の研究者から予想という形で述べられていたことで、この予想の解決が本研究の最終的な目的であった。

3　研究の方法

主として 2 つの方法を用いて、多面体積（ここでは簡単のために moment-angle complex Z_K についてのみ記載する）のホモトピー型を決定する。

1. 単体複体 K が 2 つの部分複体 K_1, K_2 の和集合となっているとき、次の push-out diagram が存在する。

$$\begin{array}{ccc} Z_{K_1 \cap K_2} & \longrightarrow & Z_{K_1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ Z_{K_2} & \longrightarrow & Z_K \end{array}$$

   帰納法等を用いながら、$Z_{K_1 \cap K_2}$, Z_{K_1}, Z_{K_2} のホモトピー型と 2 つの包含写像を調べることにより、Z_K のホモトピー型を決定する。この方法は他の研究者も採用している方法で、非常に有用である。

2. $[m]$ 上の単体複体 K と $I \subset [m]$ に対して、I 上の単体複体 K_I を $K_I = \{\sigma \subset I \mid \sigma \in K\}$ によって定義する。このとき、K_I に付随する moment-angle complex Z_{K_I} は自然に Z_K に埋め込むことができる。$1 \leq i \leq m$ に対して

$$Z_K^i = \bigcup_{I \subset [m],\ |I|=i} Z_{K_I}$$

とおくと、Z_K のフィルトレーション

$$* = Z_K^0 \subset Z_K^1 \subset \cdots Z_K^{m-1} \subset Z_K^m = Z_K$$

が得られる。これをファットウエッジフィルトレーションと言い FWF と略記する。このフィルトレーションは一般の多面体積にも定義され、特に、real moment-angle complex $\mathbb{R}Z_K$ の FWF の解析が重要である。

real moment-angle complex $\mathbb{R}Z_K$ の FWF の構造の決定自体が本研究の大きな研究成果であるが、この結果を用いることによって他の追随を許さない大きな成果を得ることができた。

4 研究成果

研究成果を述べるために、多面体積とは何か、その定義を述べる。
$[m]$ 上の単体複体 K と m 個の位相空間対 $(\underline{X}, \underline{A}) = \{(X_i, A_i)\}$ に対して多面体積 $Z_K(\underline{X}, \underline{A})$ を

$$Z_K(\underline{X}, \underline{A}) = \bigcup_{\sigma \in K} (\underline{X}, \underline{A})^\sigma \subset X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_m$$

によって定義する。ここに、

$$(\underline{X}, \underline{A})^\sigma = \{(x_1, x_2, \cdots, x_m) \in X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_m \mid x_i \in A_i \quad \text{for } i \notin \sigma\}$$

である。特に、すべての i について $(X_i, A_i) = (X, A)$ の時は、$Z_K(\underline{X}, \underline{A})$ を $Z_K(X, A)$ と書く。そして、$Z_K = Z_K(D^2, S^1)$, $\mathbb{R}Z_K = Z_K(D^1, S^0)$ がそれぞれ moment-angle complex と real moment-angle complex である。

1. 一番大きな成果は多面体積の FWF に関する研究結果 [5] である。

定理 1.1. $i = 1, \cdots, m$ に対して $\mathbb{R}Z_K^i$ は $\mathbb{R}Z_K^{i-1}$ に $|K_I|$（$|I| = i$）のコーンを写像 $\varphi_I : |K_I| \to Z_K^{i-1}$ によって張り合わせた空間である。同様に、Z_K^i は Z_K^{i-1} に $\Sigma^{|I|}|K_I|$（$|I| = i$）のコーンを写像 $\tilde{\varphi}_I : \Sigma^{|I|}|K_I| \to Z_K^{i-1}$ によって張り合わせた空間である。

2. 上記定理 1.1 を用いることによって次の定理群を証明することができる。これにより、研究目的の 1 と 2 は達成された。

定理 1.1 の写像 $\varphi_I : |K_I| \to \mathbb{R}Z_K^{|I|-1}$ がすべての $I \subset [m]$ に対して null-homotopic のとき、$\mathbb{R}Z_K$ の FWF は自明であるという。同様に、写像 $\tilde{\varphi}_I : \Sigma^{|I|}|K_I| \to Z_K^{|I|-1}$ がすべての $I \subset [m]$ に対して null-homotopic のとき、Z_K の FWF は自明であるという。このとき、

定理 2.1. $\mathbb{R}Z_K$ の FWF が自明であるとき、すべての空間系 $\underline{X} = \{X_i\}_{i \in [m]}$ について

$$Z_K(C\underline{X}, \underline{X}) \simeq \bigvee_{\emptyset \neq I \subset [m]} \Sigma|K_I| \wedge \hat{X}^I$$

である。ここに、$C\underline{X} = \{CX_i\}_{i \in [m]}$、$I = \{i_1, \cdots, i_k\}$ に対して $\hat{X}^I = X_{i_1} \wedge \cdots \wedge X_{i_k}$ である。

定理 2.2. 次の 3 条件は同値である。

(1) Z_K の FWF は自明である。

(2) Z_K は co-H-空間である。

(3) 次のホモトピー同値写像が存在する。

$$Z_K \simeq \bigvee_{\emptyset \neq I \subset [m]} \Sigma^{|I|+1} |K_I|.$$

単体複体のクラスで次のような含意が知られている。

shifted $\Longrightarrow$ vertex-decomposable $\Longrightarrow$ shellable $\Longrightarrow$ sequentially Cohen-Macaulay over $\mathbb{Z}$

次の定理が研究目的 1 に対する回答である。

定理 2.3. 単体複体 K の Alexander 双対が sequentially Cohen-Macaulay over $\mathbb{Z}$ ならば、$\mathbb{R}Z_K$ の FWF は自明である。

$[m]$ 上の単体複体 K について、$k+1$ 以下の要素を持つすべての $[m]$ の部分集合が K の単体であるとき、K は k-neighborly という。次の定理が研究目的 2 に対する回答である。

定理 2.4. 単体複体 K が $\lceil(\dim K)/2\rceil$-neighborly ならば、$\mathbb{R}Z_K$ の FWF は自明である。

3. 最後に研究目的の 3 については次の結果 [6] により否定的に解決された。

定理 3.1. Golod 単体複体 K で、Z_K が懸垂空間とホモトピー同値でないものが存在する。

参考文献

[1] A. Bahri, M. Bendersky, F.R. Cohen, and S. Gitler: *The polyhedral product functor: a method of decomposition for moment-angle complexes, arrangements and related spaces*, Advances in Math. **225** (2010), 1634–1668.

[2] I. Baskakov, V.M. Buchstaber and T.E. Panov, *Algebras of cellular cochains, and torus actions*, Uspekhi Mat. Nauk **59** (2004), no.3, 159–160.

[3] J. Grbić and S. Theriault, *The homotopy types of the complement of the codimension-two coordinate subspace arrangement*, Uspekhi Mat. Nauk **59** (2004), no. 6, 203–204 (Russian).; Russian Math. Surveys **59** (2004), no. 6, 1207–1209 (English translation).

[4] K. Iriye and D. Kishimoto, *Decompositions of polyhedral products for shifted complexes*, Adv. Math. **245** (2013), 719–736.

[5] K. Iriye and D. Kishimoto, *Fat-wedge filtrations and decomposition of polyhedral products*, Kyoto J. Math. **59** (2019), no. 1, 1–51.

[6] K. Iriye and T. Yano, *A Golod complex with non-suspension moment-angle complex*, Topology Appl. **225** (2017), 145–163.

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計8件（うち査読付論文　8件／うち国際共著　0件／うちオープンアクセス　2件）

１．著者名 Kouyemon Iriye and Daisuke Kishimoto	４．巻 -
２．論文標題 Whitehead products in moment-angle complexes	５．発行年 2021年
３．雑誌名 Journal of the Mathematical Society of Japan	６．最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 －

１．著者名 Kouyemon Iriye	４．巻 55
２．論文標題 On the moment-angle manifold constructed by Fan, Chen, Ma and Wang	５．発行年 2018年
３．雑誌名 Osaka Journal of Mathematics	６．最初と最後の頁 587-593
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 －

１．著者名 Kouyemon Iriye, Daisuke Kishimoto and Takahiro Matsushita	４．巻 19
２．論文標題 Relative phantom maps	５．発行年 2018年
３．雑誌名 Algebraic & Geometric Topology	６．最初と最後の頁 341-362
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.2140/agt.2019.19.341	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

１．著者名 Kouyemon Iriye and Daisuke Kishimoto	４．巻 59
２．論文標題 Fat-wedge filtration and decomposition of polyhedral products	５．発行年 2019年
３．雑誌名 Kyoto Journal of Mathematics	６．最初と最後の頁 1-51
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1215/21562261-2017-0038	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

１．著者名 Kouyemon Iriye and Tatsuya Yano	４．巻 ２２５
２．論文標題 A Golod complex with non-suspension moment-angle complex	５．発行年 2017年
３．雑誌名 Topology and its Applications	６．最初と最後の頁 145-163
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） https://doi.org/10.1016/j.topol.2017.04.027	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

１．著者名 Kouyemon Iriye and Daisuke Kishimoto	４．巻 30
２．論文標題 Goldness and polyhedral products for two-dimensional simplicial complexes	５．発行年 2018年
３．雑誌名 Forum Mathematicum	６．最初と最後の頁 527-532
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） https://doi.org/10.1515/forum-2017-0130	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

１．著者名 Kouyemon Iriye and Daisuke Kishimoto	４．巻 16
２．論文標題 Decomposition of suspension of spaces involving polyhedral products	５．発行年 2016年
３．雑誌名 Algebraic & Geometric Topology	６．最初と最後の頁 825-841
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.2140/agt.2016.16.825	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

１．著者名 Kouyemon Iriye and Daisuke Kishimoto	４．巻 59
２．論文標題 Fat-wedge filtration and decomposition of polyhedral products	５．発行年 2019年
３．雑誌名 Kyoto Journal of Mathematics	６．最初と最後の頁 1-52
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1215/21562261-2017-0038	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

〔学会発表〕　計13件（うち招待講演　9件／うち国際学会　3件）

1．発表者名
岸本大祐

2．発表標題
Higher Whitehead products in moment-angle complexes

3．学会等名
Toric Topology 2019 in Okayama（招待講演）

4．発表年
2019年

1．発表者名
岸本大祐

2．発表標題
Golodness and polyhedral products for surface triangulations

3．学会等名
Toric Topology Research Seminar, the Fields Institute for Research in Mathematical Sciences（招待講演）（国際学会）

4．発表年
2020年

1．発表者名
岸本大祐

2．発表標題
When is a polyhedral product a finite Postnikov section?

3．学会等名
Workshop on Polyhedral Products in Homotopy Theory（招待講演）（国際学会）

4．発表年
2020年

1．発表者名
入江幸右衛門

2．発表標題
Golod 性とその周辺

3．学会等名
ホモトピー沖縄（招待講演）

4．発表年
2018年

１．発表者名 岸本大祐
２．発表標題 Right-angled Coxeter quandles and polyhedral products
３．学会等名 ホモトピー論シンポジウム２０１８（招待講演）
４．発表年 2018年

１．発表者名 岸本大祐
２．発表標題 The Stanley-Reisner functor for a poset
３．学会等名 離散幾何構造セミナー
４．発表年 2018年

１．発表者名 岸本大祐
２．発表標題 Whitehead products in moment-angle complexes
３．学会等名 福岡ホモトピー論セミナー
４．発表年 2019年

１．発表者名 入江幸右衛門
２．発表標題 Homotopy theory of polyhedral products
３．学会等名 ホモトピー論シンポジウム
４．発表年 2017年

１．発表者名 岸本大祐
２．発表標題 ポリヘドラル・プロダクトのホモトピー論
３．学会等名 2018　日本数学会　年会（招待講演）
４．発表年 2018年

１．発表者名 岸本大祐
２．発表標題 Homotopy decomposition of diagonal arrangements
３．学会等名 Toric Topology Workshop（招待講演）（国際学会）
４．発表年 2016年

１．発表者名 岸本大祐
２．発表標題 ポリヘドラルプロダクトのホモトピー論
３．学会等名 第63回トポロジーシンポジウム（招待講演）
４．発表年 2016年

１．発表者名 入江幸右衛門
２．発表標題 On a Golod conjecture
３．学会等名 ホモトピー論シンポジウム
４．発表年 2014年

１．発表者名 入江幸右衛門
２．発表標題 On a polyhedral product which is homotopy equivalent to a suspension space
３．学会等名 Workshop and Seminar on Topological Combinatorics（招待講演）
４．発表年 2015年

〔図書〕　計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

―

６．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考
研究分担者	岸本　大祐 (Kishimoto Daisuke) (60402765)	京都大学・理学研究科・准教授 (14301)	
研究分担者	蓮井　翔 (Hasui Sho) (50792454)	筑波大学・数理物質系・助教 (12102)	