

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 29 年 6 月 22 日現在

機関番号：32617

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2014～2016

課題番号：26400097

研究課題名(和文)多様体グラフの埋め込み

研究課題名(英文)Embeddings of manifold-graphs

研究代表者

小沢 誠(Ozawa, Makoto)

駒澤大学・総合教育研究部・教授

研究者番号：50308160

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,700,000円

研究成果の概要(和文)：(1) 3次元球面の3次元部分多様体について、その中に含まれる結び目のホモトピーによる自明化、サイフェルト曲面の存在性と絡み目に沿ったデーン手術の関係、ツイストによるFoxの再埋め込みの実現性について研究をし、結果を得た。
(2) 多重分岐曲面の3次元多様体への埋め込みから、種数を定義し、分岐数と区域数の和で上から抑えられることを示した。
(3) 任意に高い橋数のdestabilized橋球面をもつ結び目を構成した。

研究成果の概要(英文)：(1) For 3-submanifolds of the 3-sphere, we studied and obtained results on trivialization of knots in it by a homotopy, relation between the existence of Seifert surfaces and Dehn surgery along links, realization of Fox's re-embeddings by twistings.
(2) From embeddings of multibranch surfaces into 3-manifolds, we defined the genus of it, and showed that the genus is bounded by the sum of the number of branches and sectors above.
(3) We constructed knots with destabilized bridge spheres of arbitrary high bridge number.

研究分野：結び目理論

キーワード：3次元球面 多重分岐曲面 埋め込み 部分多様体 橋分解

1. 研究開始当初の背景

(1) 3次元球面の3次元部分多様体について、次の3つの視点で取り掛かった。

3次元球面の結び目はホモトピーで自明な結び目に変形できる。ここで、ホモトピーを、結び目を含む3次元部分多様体に制限したらどうだろうか？一般には、ホモトピーで自明な結び目に変形はできない。そこで、どのような3次元部分多様体なら可能だろうかという問題が生じる。

結び目に対して、ザイフェルト曲面は基本的であり、非常に良く研究されている。一方、3次元部分多様体について、ザイフェルト曲面はあまり研究されていない。そこでまず、ザイフェルト曲面の存在性が問題となる。

Foxの再埋め込み定理により、3次元球面の任意のコンパクト部分多様体は、外部がハンドル体の和となるように3次元球面へ再埋め込みできる。例えば、結び目については、交差交換により自明な結び目にできるので、外部がトラス体となるように3次元球面へ再埋め込みできることが分かる。しかし、2次元・3次元部分多様体については、Foxの再埋め込みがツイストで得られるかは知られておらず、未解決問題である。

(2) 本研究の申請時に多様体グラフと呼んでいた多重分岐曲面について、3次元多様体への埋め込みを通して、グラフ理論と3次元多様体論の融合が研究背景となった。

(3) 結び目の橋分解について、最小橋数でないdestabilized橋分解球面の存在は示していたが、任意に高い橋数のものが存在するかどうかは未解決問題であった。

2. 研究の目的

(1) 3次元球面の3次元部分多様体について、次の3つの視点で取り掛かった。

3次元球面の3次元部分多様体にある結び目がtransientであるとは、部分多様体内でのホモトピーで3次元球面内の自明な結び目に変形できるときをいう。どのような3次元部分多様体について、そこに含まれる任意の結び目がtransientであるか特徴付けをすることが研究目的となった。

3次元部分多様体にザイフェルト曲面が存在することは、簡単なホモロジーの議論で証明できる。但し、一般にはザイフェルト曲面の境界数と連結成分数が一致するとは限らない。本研究では、ザイフェルト曲面と絡み目に沿ったデーン手術を関連付けさせることが研究目的となった。

3次元球面の1次元部分多様体、即ち、結び目や絡み目については、交差交換で自明にできることが知られているので、ツイストにより解けることが従う。閉2

次元多様体や3次元部分多様体について、ツイストにより解けることができるか？が研究目標となった。

(2) どのような多重分岐曲面が3次元球面に埋め込み、どのような多重分岐曲面が3次元球面に埋め込めないか決定することが研究目標となる。

(3) Casson-Gordonにより、任意に高い種数のdestabilizedヒーガード曲面をもつ3次元多様体の構成がされている。一方、結び目については、対応する結果が得られていない。結び目に対して、Casson-Gordonの結果に対応する結果を得ることが目的である。

3. 研究の方法

(1) 3次元球面の3次元部分多様体について、次の3つの視点で取り掛かった。

次の定理を群論的に示すことがキーとなった： M をコンパクト連結3次元多様体で連結な境界を持つものとする。このとき、 M をfillする結び目 K が M の内部に存在する。更に、このような結び目 K は、 $N(M; M)$ にあるように取れる。結び目 K に対して、ザイフェルト曲面 F を張る。このとき、 F と交わらない自明なループに沿ったツイストで、 F を標準形にできる。 F が標準形であるので、 K は自明な結び目である。このツイストは、 F と交わらないループに沿って行っているため、 K の外部でnull-homologousである。逆に、 K の外部のnull-homologousなループに沿ったツイストにより、 K を自明な結び目にできたならば、それらのループと交わらない K のザイフェルト曲面が存在する。この現象を、3次元部分多様体に拡張することが研究方法である。まず、3次元球面内の2次元多様体については、圧縮可能であるため、圧縮後の2次元多様体について、帰納法を適用することにより、ツイストで解けることを証明する。3次元部分多様体については、本間の曲面に着目し、ツイストを本間の曲面の片側に制限した場合、解けることができないことを証明する。

(2) 多重分岐曲面の1次元ホモロジー群を計算して、トーションがあれば、3次元球面に埋め込めないことを示すことができる。全ての研究が完了した後に、Fico González Acuña氏から教わったことであるが、「連結な境界を持つコンパクト3次元多様体 M がホモロジー3次元球面に埋め込み可能であるための必要十分条件は、 M の1次元ホモロジー群がfreeかつ2次元ホモロジー群が自明であること」が同氏により示されていた。

(3) 3次元球面の結び目で、2重分岐被覆をとったとき、Casson-Gordonの3次元多様体を得られるものを構成する。ヒーガード曲面が強既約であることから、橋分解球面も強既約であることが従う。

4. 研究成果

(1) 3次元球面の3次元部分多様体について、次の3つの研究成果が得られた。

3次元球面の部分空間内にある全ての結び目が transient である為の必要十分条件は、その部分空間の外部がハンドル体の非交和であることが得られた。この結果は、雑誌論文の に発表した。

3次元球面内の連結な境界を持つコンパクト連結3次元部分多様体に対して、ザイフェルト曲面系の存在を零ホモローク絡み目に沿ったデー手術に関連付けた。系として、Foxの再埋め込み定理を得た。

この結果は、雑誌論文の に発表した。

3次元球面に埋め込まれた任意の2次元多様体がツイストにより解けることを示した。また、3次元球面のコンパクト3次元部分多様体で、ツイストにより解けないものが存在することを示した。これは、Foxの再埋め込みが常にツイストに置き換えることはできないことを示す。

この結果は、雑誌論文の に発表した。

(2) 任意の多重分岐曲面が4次元ユークリッド空間に埋め込み可能であることを示した。更に、ある閉3次元多様体に埋め込み可能である為の必要十分条件を決定した。また、多重分岐曲面に対して、閉3次元多様体のヒーガード種数を用いて種数を定義し、上からの評価式を与えた。多重分岐曲面に対して、マイナーを定義した。3次元球面に埋め込めるという性質はマイナーに関して閉じており、その障害集合の決定は、クラトフスキーの定理の高次元化になる。いくつかの多重分岐曲面が禁止グラフとなることを示した。この結果は、雑誌論文の に発表した。

(3) 任意の0以上の整数 k に対して、destabilized $(2k+5)$ -橋球面をもつ結び目の無限列を構成した。また、任意の4以上の整数 n に対して、destabilized 3-橋球面と destabilized n -橋球面を持つ結び目が存在することを示した。この結果は、雑誌論文の に発表した。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

〔雑誌論文〕(計 11件)

1. M. Eudave-Munoz, M. Ozawa, Composite tunnel number one genus two handlebody-knots, Bol. Soc. Mat. Mexicana, 査読有, 20 (2014) 375-390.
2. Y. Koda, M. Ozawa, Essential surfaces of non-negative Euler characteristic in genus two handlebody exteriors, Trans. Amer. Math. Soc., 査読有, 367 (2015) 2875-2904.
3. A. Ishii, K. Kishimoto, M. Ozawa, Knotted handle decomposing spheres for handlebody-knots, J. Math. Soc.

Japan, 査読有, 67 (2015) 407-417.

4. M. Ozawa, Coexistence of coiled surfaces and spanning surfaces for knots and links, J. Austral. Math. Soc., 査読有, 99 (2015) 250-259.
5. M. Ozawa, 結び目と曲面, Math. Soc. Japan, Sugaku, 査読有, Vol. 67, No. 4 (2015) 403-423.
6. Y. Koda, M. Ozawa, Knot homotopy in subspaces of the 3-sphere, Pacific J. Math., 査読有, 282 (2016) 389-414.
7. K. Eto, S. Matsuzaki, M. Ozawa, An obstruction to embedding 2-dimensional complexes into the 3-sphere, Topology and its Appl., 査読有, 198 (2016) 117-125.
8. Y. Jang, T. Kobayashi, M. Ozawa, K. Takao A knot with destabilized bridge spheres of arbitrarily high bridge number, J. London Math. Soc., 査読有, 93 (2016) 379-396.
9. M. Ozawa, K. Shimokawa, Dehn surgery and Seifert surface system, Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci., 査読有, (5) Vol. XVII (2017) 267-276.
10. S. Matsuzaki, M. Ozawa, Genera and minors of multibranched surfaces, Topology and its Appl., 査読有, 掲載予定, <https://arxiv.org/abs/1603.09041>.
11. M. Ozawa, Unknotting submanifolds of the 3-sphere by twistings, Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci., 査読有, 掲載予定, <https://arxiv.org/abs/1609.06573>.

〔学会発表〕(計 23件)

1. Makoto Ozawa, Unknotting submanifolds of the 3-sphere by twistings, 首都大学東京(東京都・八王子市)「日本数学会2017年度年会」, 2017年3月26日.
2. Makoto Ozawa, Embeddings of multibranched surfaces into 3-manifolds, Universidad Nacional Autonoma de Mexico (メキシコ・メキシコシティ)「Seminaro Guillermo Torres de Geometría y Topología」, 2017年2月23日.
3. Makoto Ozawa, Unknotting submanifolds of the 3-sphere by twistings, Universidad Nacional Autonoma de Mexico(メキシコ・メキシコシティ)「Seminaro de Topologia en Dimensiones Bajas」, 2017年2月20日.
4. Kazuto Takao, On bridge positions and bridge decompositions, (joint work with Yeonhee Jang, Tsuyoshi Kobayashi, Kazuto Takao), 東京大学(東京都・目黒区)「The 12th East Asian School of Knots and Related Topics」, 2017年2

- 月 15 日.
5. Makoto Ozawa, Unknotting submanifolds of the 3-sphere by twistings, 東京女子大学(東京都・杉並区)「東京女子大学トポロジーセミナー」, 2016 年 10 月 29 日.
 6. Kazuto Takao, 結び目の橋位置と橋分解, (joint work with Yeonhee Jang, Tsuyoshi Kobayashi, Kazuto Takao), 大阪市立大学文化交流センター(大阪府・大阪市)「N-KOOK セミナー」, 2016 年 10 月 22 日.
 7. Makoto Ozawa, Essential embeddings of multibranch surfaces into 3-manifolds, Bowdoin College(アメリカ・メイン州)「Fall Eastern Sectional Meeting, AMS Special Session, Decomposing 3-manifolds」, 2016 年 9 月 24 日.
 8. Makoto Ozawa, Genera of multibranch surfaces, (joint work with Shosaku Matsuzaki), 筑波大学(茨城県・つくば市)「日本数学会 2016 年度年会」, 2016 年 3 月 16 日.
 9. Shosaku Matsuzaki, Minors of multibranch surfaces, (joint work with Shosaku Matsuzaki), 筑波大学(茨城県・つくば市)「日本数学会 2016 年度年会」, 2016 年 3 月 16 日.
 10. Makoto Ozawa, Genera of multibranch surfaces, (joint work with Shosaku Matsuzaki), てんぷす那覇(沖縄県・那覇市)「2016 琉球結び目セミナー」, 2016 年 2 月 21 日.
 11. Kazuto Takao, On bridge positions, bridge decompositions and bridge spheres, (joint work with Yeonhee Jang, Tsuyoshi Kobayashi, Kazuto Takao), 大阪市立大学(大阪府・大阪市)「Friday Seminar on Knot Theory」, 2015 年 12 月 11 日.
 12. Makoto Ozawa, Embeddings of multibranch surfaces, (joint work with Shosaku Matsuzaki), Min Nan Normal University(中華人民共和国・福建省)「1st Pan Pacific International Conference on Topology and Applications」, 2015 年 11 月 27 日.
 13. Makoto Ozawa, Embeddings of multibranch surfaces, (joint work with Shosaku Matsuzaki), California State University, Fullerton(アメリカ・カリフォルニア州)「The Spatial Graphs Special Session at the AMS Sectional Meeting」, 2015 年 10 月 24 日.
 14. Shosaku Matsuzaki, 2次元複体の3次元球面への埋め込み, (joint work with Shosaku Matsuzaki), 奈良教育大学(奈良県・奈良市)「Workshop 2015 on Mathematics and Mathematical Education」, 2015 年 8 月 31 日.
 15. Makoto Ozawa, Embeddings of multibranch surfaces, (joint work with Shosaku Matsuzaki), 神戸大学百年記念館(兵庫県・神戸市)「拡大 KOOK セミナー2015」, 2015 年 8 月 18 日.
 16. Makoto Ozawa, Knot homotopy in subspaces of the 3-sphere, (joint work with Yuya Koda), 明治大学(東京都・千代田区)「日本数学会 2015 年度年会」, 2015 年 3 月 24 日.
 17. Shosaku Matsuzaki, Impossibility of embeddings of 2-dimensional complexes into the 3-sphere, (joint work with Shosaku Matsuzaki), 明治大学(東京都・千代田区)「日本数学会 2015 年度年会」, 2015 年 3 月 21 日.
 18. Yuya Koda, Knot homotopy in subspaces of the 3-sphere, (joint work with Yuya Koda), Hanyang University(大韓民国・ソウル特別市)「The 5th HYU MATH-Workshop Low Dimensional Topology」, 2015 年 2 月 4 日.
 19. Makoto Ozawa, Impossibility of embeddings of 2-dimensional complexes into the 3-sphere, (joint work with Shosaku Matsuzaki), 東京女子大学(東京都・杉並区)「結び目の数学 VII」, 2014 年 12 月 25 日.
 20. Yuya Koda, Knot homotopy in a subspace of the 3-sphere, (joint work with Yuya Koda), 広島大学(広島県・東広島市)「広島大学トポロジー幾何セミナー」, 2014 年 11 月 18 日.
 21. Makoto Ozawa, Knot homotopy in a subspace of the 3-sphere, (joint work with Yuya Koda), BEXCO Convention & Exhibition Center II(大韓民国・釜山広域市)「A Satellite Conference of Seoul ICM 2014: Knots and Low Dimensional Manifolds」, 2014 年 8 月 25 日.
 22. Makoto Ozawa, A knot with destabilized bridge spheres of arbitrarily high bridge number, (joint work with Yeonhee Jang, Tsuyoshi Kobayashi, Kazuto Takao), University of Iowa(アメリカ・アイオワ州)「The Thin Manifold」2014 年 8 月 10 日.
 23. Makoto Ozawa, Handlebody-knots from the viewpoint of 3-manifold theory, 筑波大学(茨城県・つくば市)「筑波大学トポロジーセミナー」, 2014 年 7 月 24 日.
- 〔図書〕(計 件)
- 〔産業財産権〕
- 出願状況(計 件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

取得状況（計 件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕

ホームページ等

<https://www.komazawa-u.ac.jp/~w3c/>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

小沢 誠 (OZAWA, Makoto)

駒澤大学・総合教育研究部・教授

研究者番号：50308160

(2) 研究分担者

()

研究者番号：

(3) 連携研究者

()

研究者番号：

(4) 研究協力者

()