

令和元年5月29日現在

機関番号：32665

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2014～2018

課題番号：26400099

研究課題名(和文) ザイフェルト多様体, L-空間, 基本群の左不変順序とデーン手術の総合的研究

研究課題名(英文) Seifert fiber spaces, L-spaces, left-orderability of fundamental groups and Dehn surgery

研究代表者

茂手木 公彦 (MOTEGI, Kimihiko)

日本大学・文理学部・教授

研究者番号：40219978

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,600,000円

研究成果の概要(和文)：例外型手術の一つであるザイフェルト手術についてseifertを用いたネットワークの研究を進め、Baker氏との共同研究でseifertの概念を一般化し、研究の枠組みを拡張した。また、ネットワークの視点からL-空間結び目の研究を進め、ねじり操作により無限個のL-空間結び目が生じる例を豊富に構成した。最近のBaker氏との共同研究で結び目のツイスト族がL-空間結び目を無限個含むための必要条件を与えた。寺垣内氏と共役ねじれ元の研究を進め、双曲構造以外の幾何構造を持つ3次元多様体に対して、その基本群が両側不変順序を持たないことと共役ねじれ元を持つことが同値であることを証明した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

本研究ではザイフェルト手術のネットワークの視点からの研究で導入されたSeifert Surgery Networkの連結性に関連してseifertの概念を一般化し、研究の枠組みを拡張した。また、ネットワークの視点を現在活発に研究されているL-空間結び目の研究に応用し、豊富な例の構成をはじめ、L-空間結び目への幾何的制限を与えることに成功した。証明の過程でタイトな接触構造をサポートするファイバー結び目に関する興味深い事実を明らかにした。最近注目されている3次元多様体の基本群の共役ねじれ元についても基本群の両側不変順序と関連した研究を進展させ、今後の研究の新たな方向を与えることができた。

研究成果の概要(英文)：We study Seifert surgeries on knots, which are exceptional Dehn surgeries, from a networking viewpoint. In particular, a joint work with Baker (University of Miami) extends a foundation of Seifert Surgery Network by generalizing a notion of seifert. Using seiferters which have key roles in a study of Seifert Surgery Network, we study a relationship between L-space knots and twisting operation and provide a plenty of twist families of knots which contain infinitely many L-space knots. Furthermore, recently in a joint work with Baker we gave a necessary condition for a twist family of knots to contain infinitely many L-space knots. We also study generalized torsion elements in 3-manifold groups, and a joint work with Teragaito (Hiroshima University) proves that the fundamental group of a geometric 3-manifold which is not hyperbolic has no bi-ordering if and only if it has a generalized torsion element.

研究分野：低次元トポロジー

キーワード：幾何学 トポロジー 3次元多様体 結び目 デーン手術 ザイフェルト多様体 L-空間 共役ねじれ元

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19、CK - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

2013年度までの研究(課題番号 21540098)でザイフェルト手術全体からなるネットワーク(Seifert Surgery Network)という概念を導入し、ザイフェルト手術の発生のメカニズムを seiferter による“伝播性(遺伝性)”という視点で記述してきた。本研究を開始した当初、Seifert Surgery Network に関する研究の基礎的な部分はある程度完成していた。しかし Seifert Surgery Network の連結性という究極の問題が未解決であった。また、ネットワークの視点を生かした新たな研究を模索していた。一方、Heegaard Floer 理論におけるレンズ空間の一般化である L-空間の研究が活発になされ、既約な有理ホモロジー球面が L-空間であるための必要十分条件はその基本群が左不変順序を許容しないことであるという L-空間予想(Boyer-Gordon-Watson)が注目を集めていた。寺垣内政一氏(広島大学)との共同研究で L-空間予想に取り組み、デーン手術の研究で培われた技術を駆使して L-空間予想を支持する結果を得て、それを契機に群の不変順序や Heegaard Floer 理論に関する知識を吸収していた。L-空間を構成する有効な手段に L-空間結び目のデーン手術が挙げられる。研究開始当初に知られていた L-空間結び目はザイフェルト L-空間手術を持っており、ザイフェルト手術の研究を応用できることに気づき、seiferter でのねじり操作で L-空間結び目を大量に生成することに成功した。これをきっかけに Kenneth Baker 氏(University of Miami)と情報交換を行うようになり、これらの例から数多くの興味深い性質が見いだされ、さらにそこからいくつかの予想が導かれた。こうして得られた予想がその後の研究の大きな原動力になっている。また、L-空間結び目はタイトな接触構造をサポートするファイバー結び目で、接触構造と関連させた研究が有効である。そこで、接触構造に関する勉強会を開催したり、研究集会に参加して必要な知識の吸収にも取り組み、研究の裾野が広がりつつあった。基本群の不変順序に関する研究と関連して共役ねじれ元も注目され始め、双曲結び目群の共役ねじれ元の最初の例がコンピュータ実験から見いだされていた。このように共役ねじれ元に関しては例が発見されたばかりの状況で、幾何的な意味も含め、一般的な性質はほとんどわかっていなかった。

2. 研究の目的

ザイフェルト多様体、L-空間、基本群の不変順序を、デーン手術をキーワードに最近の研究動向を視野に入れて総合的に理解することが目的であった。ザイフェルト手術の研究に関しては究極の問題である Seifert Surgery Network の連結性を示すことが大きな目的である。Seifert Surgery Network が連結であることが証明されれば、すべてのザイフェルト手術はトラス結び目のザイフェルト手術に起源を持つことがわかり、ザイフェルト手術が完全に解明されることになる。ザイフェルト手術の発生源となるトラス結び目のザイフェルト手術の seiferter の決定も重要な意味を持つ。また、非対称 seiferter を利用して primitive/Seifert 構成で得られないザイフェルト手術が見いだされていたので、同様な方法で primitive/primitive 構成で得られないレンズ空間手術を発見することも一つの目的であった。このような例が見つければ懸案の Berge 予想の否定的解決につながる。一方、レンズ空間の Heegaard Floer 理論での一般化である L-空間に関する研究では、L-空間を生み出すデーン手術とねじり操作の関係の解明を目的に研究を進めた。本研究の前半では seiferter を用いたザイフェルト L-空間手術に焦点を絞り、例の構成および、それらの例を通してどのような性質が期待できるか明らかにすることを目的として研究を進めた。後半ではザイフェルト L-空間手術とねじり操作の関係をもとに、ザイフェルト構造を仮定しない一般の状況下での L-空間手術とねじり操作の関係の解明を目指した。また、L-空間結び目はタイトな接触構造をサポートするファイバー結び目であり、strongly quasipositive 結び目と呼ばれる結び目にもなっていることから、研究の枠組みを広げ、このような結び目に対する新たな視点からの研究も目指した。さらに既約な L-空間はその基本群が左不変順序を持たないことで特徴付けられるという L-空間予想から、本研究では代数的な側面として基本群の左不変順序、両側不変順序といった不変順序の研究にも取り組み、L-空間予想の解決へ貢献することが一つの目的であった。特に、ねじり操作で得られた L-空間手術から大量の L-空間が得られるので、それらに対して L-空間予想を検証することを目的に研究を進めた。基本群が両側不変順序を持つ際の障害として共役ねじれ元が登場するが、3次元多様体の基本群に対して基本群が両側不変順序を許容しないことと共役ねじれ元を持つことが同値であることは興味深い問題であり、その解決は現在も継続中の主要な目的である。

3. 研究の方法

ザイフェルト手術の研究に関してはこれまでの研究で導入されていた Seifert Surgery Network の研究を進め、具体例を参照して新しい seiferter の発見、seiferter の概念の自然な拡張を目指して研究を進めた。本研究の前半では seiferter を有効に活用できるザイフェルト L-空間手術に焦点を絞って研究を進め、組織的にザイフェルト L-空間手術を構成する手法を構築した。こうして得られた豊富な例から、その後の研究の方向性を定め、一般的な状況での L-空間手術の研究の基礎の確立を念頭に研究を展開した。上で得られた多くの例を参考にして、ねじり操作で無限個の L-空間結び目を含むような結び目のツイスト族が得られるための必要条件、十分条件を明らかにする研究に Baker 氏と着手した。そこでいくつかの興味深い予想が

得られたので、後半では Baker 氏とともに、その予想の解決に向けた研究を進めた。その際には、ザイフェルト構造とは独立した道具が必要になり、接触幾何やブレイド理論に関する結果も積極的に活用して研究を進めた。特に、正の L-空間結び目はタイトな接触構造をサポートするファイバー結び目であることが知られているので、L-空間結び目でないことを証明する際に、枠組みを広げてタイトな接触構造をサポートするファイバー結び目でないことを示すことが有効であった。また、L-空間に対しては上の事実からザイフェルト種数とスライス種数が一致するという性質もあり、本研究では結び目のツイスト族に対して、ザイフェルト種数とスライス種数の振る舞いの比較についての考察を行った。Baker 氏とは電子メールによる情報交換を中心に研究を進め、夏季休暇などの長期休暇を利用してマイアミ大学に行き、対面式のセミナーを実施して効率的に共同研究を進めた。また、得られた研究成果を Baker 氏とともに国内外の数多くの研究集会で講演し、そこで得られた情報を元に結果に改良を加えてきた。L-空間予想に関しては寺垣内氏との共同研究で結び目のデーンス手術で得られた 3 次元多様体に対して予想が成り立つ例を構成する方法を構築していたが、その後、左不変順序よりも強い両側不変順序の研究に移行し、本研究では双曲構造以外の幾何構造をもつ 3 次元多様体の基本群が両側不変順序を許容しないことと共役ねじれ元を持つことが同値であることを証明し、これが一般の 3 次元多様体の基本群に対しても成り立つという予想を提出した。Naylor, Rolfsen によって 2014 年に双曲結び目群の共役ねじれ元の最初の例が発見されたばかりで、3 次元多様体の基本群の共役ねじれ元の研究の歴史は非常に浅く、先行研究もほとんどないので基礎的な研究から開始した。特に、共役ねじれ元の幾何学的な意味を明らかにすることは非常に重要で、具体例を参考にしながら、共役ねじれ元が発生する仕組みの理解を意識して研究を進めてきた。

4. 研究成果

例外型手術の中で最も研究が遅れているザイフェルト手術（ザイフェルト多様体を生み出すデーンス手術）に対してザイフェルト手術全体からなるネットワーク（Seifert Surgery Network）という概念を導入し、ザイフェルト手術の発生のメカニズムを seiferter による“伝播性（遺伝性）”という視点で記述してきた。本研究でも引き続きネットワークの視点から研究を進め、primitive/Seifert 構成で得られない強可逆な双曲結び目上のザイフェルト手術の存在を証明し、Seifert Surgery Network での位置を特定した。また、本研究では seiferter の概念を一般化した pseudo-seiferter を導入し、Seifert Surgery Network を拡張するとともに、このネットワークの視点をザイフェルト L-空間を生み出すデーンス手術に応用する研究を進めた。L-空間を生じるデーンス手術を持つ結び目は L-空間結び目と呼ばれ、一つの L-空間結び目からデーンス手術を経由して無限個の L-空間を得ることができる。研究当初、L-空間結び目を生成する手段は知られていなかったが、seiferter でのねじり操作を利用してザイフェルト L-空間手術や L-空間結び目を無限個生成する方法を確立した。この研究を契機として Kenneth Baker 氏（University of Miami）との共同研究が始まり、L-空間結び目のツイスト族の例の検証をもとにしてその後の研究の方向が定まった。どのような方向にねじることによって L-空間結び目のツイスト族が得られるかを詳細に検証し、ねじりを加える自明結び目と元の結び目の絡み数に着目して研究を進め、最初のステップとして絡み数が 0 のツイスト族には高々 3 個の L-空間結び目しか存在しないことを証明した。その後、この結果を一般化して結び目のツイスト族が無限個の L-空間結び目を含むならば、ねじり操作を行う自明な結び目が張る円板がねじられる結び目と常に同じ向きで交わらなければいけないことを証明した。これは本研究の初期の段階で予想として挙げられたもので、最終的に完全に解決された結果である。この結果の精密化に向けた研究は現在も継続中である。この定理を証明するにあたり、ザイフェルト種数とスライス種数（4 次元結び目種数）が結び目のねじり操作のもとでどのように振る舞うかという問題を考え、これらの種数がねじり操作のもとで漸近的に一致すれば、ねじり操作を行う自明な結び目が張る円板がねじられる結び目と代数的に 0 回交わるか、常に同じ向きで交わらなければいけないことを明らかにした。ねじり操作と並んで結び目の構成で有効な手法に結び目の連結和、その一般化であるバンド和がある。Krcatovich は Heegaard Floer ホモロジーを用いて、非自明な結び目の連結和で得られる結び目が L-空間結び目になり得ないことを証明していたが、Baker 氏との共同研究でこの結果を一般化して自明なバンド和を除き、バンド和で得られた結び目が L-空間結び目にならないことを証明した。さらに、ねじり操作の研究を進める過程で、結び目のデーンス手術による特徴付け問題への応用があることを発見し、双曲結び目に対して十分大きな（手術係数の分子、分母の絶対値の和が十分大きい）デーンス手術はその結び目を特徴付ける characterizing スローブであるかという Ni-Zhang の問題を否定的に解決した。また、研究当初から気になっていた非自明な例外手術を持たない双曲 L-空間結び目の存在を大学院生だった陶器和誠氏との共同研究で分岐被覆を利用して示すことができた。基本群の左不変順序に関する研究を進展させることはできなかったが、両側不変順序の研究を寺垣内政一氏（広島大学）と研究し、双曲構造以外の幾何構造を持つ 3 次元多様体の基本群が両側不変順序を許容しないことと共役ねじれ元を持つことが同値であることを証明し、一般の 3 次元多様体の基本群に対して同様な予想が成り立つことを予想した。この予想の解決に向け伊藤哲也氏（京都大学）、寺垣内政一氏と共同研究を行っている。特に、本研究を通じて得られた

知見は2019年度以降の結び目のDehn手術で得られる3次元多様体の基本群を対象にした研究(課題番号19K03502)の重要な足がかりとなっている。

また、本研究課題とは独立したテーマであるが、色付き Jones 多項式と結び目外部空間内の本質的曲面の関係に関する Garoufaridis によるスロープ予想に関して高田敏恵氏(九州大学)と共同研究を行い、Dehn手術の研究で得られた技術を生かしてグラフ結び目に対してスロープ予想が正しいことを証明した。

5. 主な発表論文等

[雑誌論文](計 16 件)

Kazuhiro Ichihara, Kimihiko Motegi, Masakazu Teragaito, Vanishing nontrivial elements in a knot group by Dehn fillings, *Topology Appl.*, 査読有, 出版受理

Kenneth L. Baker, Kimihiko Motegi, Twist families of L-space knots, their genera, and Seifert surgeries, *Comm. Anal. Geom.*, 査読有, 出版受理

Kimihiko Motegi, Dehn surgery on knots - tracing the evolution of research, *Sugaku Expositions, Amer. Math. Soc.*, 査読有, 出版受理

茂手木公彦, 結び目の Dehn 手術--研究の変遷をたどって, *数学(日本数学会)*, 岩波書店, 査読有, 第70巻, 第4号(2018), 379-405

Kenneth L. Baker, Kimihiko Motegi, Noncharacterizing slopes for hyperbolic knots, *Algebr. Geom. Topol.*, 査読有, 18(2018), 1461--1480

DOI: 10.2140/agt.2018.18.1461

Kimihiko Motegi, Masakazu Teragaito, Generalized torsion elements and bi-orderability of 3-manifold groups, *Canad. Math. Bull.*, 査読有, 60(2017), 830--844

DOI: 10.4153/CMB-2017-008-8

Kenneth L. Baker, Kimihiko Motegi, Tight fibered knots and band sums, *Math. Z.*, 査読有, 286(2017), 1357--1365

DOI: 10.1007/s00209-016-1804-9

Kimihiko Motegi, Kazushige Tohki, On L-space twisted torus knots, *Proceedings of the Institute of Natural Sciences, Nihon University*, 査読有, 52(2017), 325-338

<https://www.chs.nihon-u.ac.jp/institute/nature/kiyou/index.html>

Kimihiko Motegi, A note on L-spaces which are double branched covers of non-quasi-alternating links, *Topology Appl.*, 査読有, 230(2017), 172-180

DOI: 10.1016/j.topol.2017.08.043

Kimihiko Motegi, Toshie Takata, The slope conjecture for graph knots, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, 査読有, 162(2017), 383-392

DOI: 10.1017/S0305004116000566

Kimihiko Motegi, L-space surgery and twisting operation, *Algebr. Geom. Topol.*, 査読有, 16(2016), 1727-1772

DOI: 10.2140/agt.2016.16.1727

Mario Eudave-Munoz, Edgar Jasso, Katura Miyazaki, Kimihiko Motegi, Seifert fibered surgeries on strongly invertible knots without primitive/Seifert positions, *Topology Appl.*, 査読有, 196(2015) 729-753

DOI: 10.1016/j.topol.2015.05.016

Kimihiko Motegi, Kazushige Tohki, Hyperbolic L-space knots and exceptional Dehn surgeries, *J. Knot Theory Ramifications* 査読有, 23(2014), 1450079

DOI: 10.1142/S0218216514500795

Arnaud Deruelle, Katura Miyazaki, Kimihiko Motegi, Neighbors of Seifert surgeries on a trefoil knot in the Seifert Surgery Network, *Bol. Soc. Mat. Mexicana* 査読有, 20(2014), 523-558

DOI: 10.1007/s40590-014-0034-6

Arnaud Deruelle, Katura Miyazaki, Kimihiko Motegi, Networking Seifert surgeries on knots III, *Algebr. Geom. Topol.*, 査読有, 14(2014), 2065-2101

DOI: 10.2140/agt.2014.14.101

Kimihiko Motegi, Masakazu Teragaito, Left-orderable, non-L-space surgeries on knots, *Comm. Anal. Geom.*, 査読有, 22(2014), 421-449

DOI: 10.4310/CAG.2014.v22.n3.a2

[学会発表](計 25 件)

茂手木公彦, L-space knot の twist family と satellite L-space knot, *Geometric Topology of low dimensions*, 2019年

茂手木公彦, A characterization of braid axes via contact structures, *幾何学と特*

異点 2019, 2019 年

茂手木公彦, Peripheral Magnus property for knot groups, New development of low-dimensional topology, 2018 年

茂手木公彦, On satellite L-space knots, 東北結び目セミナー2018, 2018 年

茂手木公彦, Slice genera versus Seifert genera and twist families of L-space knots, 拡大 KOOK セミナー2018, 2018 年

Kimihiko Motegi, Networking Seifert fibered surgeries on knots, Lecture at Korea Institute for Advanced Study, 2018 年

Kimihiko Motegi, L-space knots in twist families and satellite L-space knots, MIST 2018 Workshop in Topology (the Chinese University of Hong Kong), 2018 年

Kimihiko Motegi, The peripheral Magnus property for knot groups, UT (The University of Texas) Topology Seminar, 2018 年

Kimihiko Motegi, L-space knots in twist families and satellite L-space knots, Representation Spaces, Teichmüller Theory, and their Relationship with 3-manifolds from the Classical and Quantum Viewpoints, 2018 年

茂手木公彦, Slice genera versus Seifert genera of knots in twist families, 4次元トポロジー, 2017 年

Kimihiko Motegi, Vanishing elements in a knot group by Dehn fillings, The 2nd Pan Pacific International Conference on Topology and Applications, 2017 年

茂手木公彦, Normal closures of slope elements in knot groups and the peripheral Magnus property, 拡大 KOOK セミナー2017, 2017 年

茂手木公彦, Twistings, band-sums and L-space surgeries, 微分トポロジー 17, 2017 年

茂手木公彦, Knots with infinitely many non-characterizing slopes, 東北結び目セミナー2016, 2016 年

茂手木公彦, L-space knots in twist families, their genera and Seifert surgeries, 拡大 KOOK セミナー2016, 2016 年

Kimihiko Motegi, Non-characterizing slopes for knots, 2016 International Conference on Low-Dimensional Topology, 2016 年

茂手木公彦, Tight fibered knots, band sums and twistings, 接触構造, 特異点, 微分方程式及びその周辺, 2016 年

Kimihiko Motegi, A note on L-spaces which are double branched covers of non-quasi-alternating links, the 1st Pan Pacific International Conference on Topology and Applications, 2015 年

茂手木公彦, The slope conjecture for graph knots, 東北結び目セミナー, 2015 年

Kimihiko Motegi, Genera of L-space knots, Braids, Configuration Spaces and Quantum Topology, 2015 年

⑲ Kimihiko Motegi, L-space surgeries and Seifert surgeries on knots, East Asia School of Knots and Related Topics, 2015 年

⑳ Kimihiko Motegi, Twisted families of L-space knots, Topology and Geometry of Low-dimensional Manifolds, 2014 年

㉑ Kimihiko Motegi, Twisted families of L-space knots, Math Department Colloquia, University of Miami, 2014 年

㉒ Kimihiko Motegi, L-space knots and twisting operation, A Satellite Conference of Seoul ICM 2014, Knots and Low Dimensional Manifolds, 2014 年

㉓ Kimihiko Motegi, A talk in 3 acts: Verified computations, L-space surgeries, and exceptional fillings (with Neil Hoffman), Knot Theory: algorithms, complexity and computation, NII Shonan Meeting, 2014 年

〔図書〕(計 1 件)

市原一裕、鈴木正彦、茂手木公彦、幾何学序論 論理・集合・写像・位相をきわめる、日本評論社 2018、227

〔その他〕

ホームページ等 <http://www.math.chs.nihon-u.ac.jp/~motegi/>

6. 研究組織

(1) 研究分担者

(2) 研究協力者

研究協力者氏名：市原 一裕

ローマ字氏名：(ICHIHARA, kazuhira)

研究協力者氏名：寺垣内 政一

ローマ字氏名：(TERAGAITO, masakazu)

研究協力者氏名：宮崎 桂

ローマ字氏名：(MIYAZAKI, katura)

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。