様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２９ 年　６ 月 ２６ 日現在

機関番号：３４３１５
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2014～2016
課題番号：２６４００１０１

研究課題名（和文）3次元多様体の同境圏と平坦接続のモジュライ空間の解析

研究課題名（英文）Cobordism category of 3-manifolds and analysis on moduli spaces of flat connections

研究代表者
福本　善洋（Fukumoto, Yoshihiro）

立命館大学・理工学部・教授

研究者番号：９０３４１０７３

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　3,100,000円

研究成果の概要（和文）：幾つかの３次元多様体を４次元多様体の境界とみなす同境関係は、４次元多様体の基本的な構成単位を調べる上で重要な研究対象である。本研究では、その同境関係を調べるために、４次元多様体上の平坦接続のモジュライ空間を考察した。特に、レンズ空間とよばれる３次元多様体の間の同境で、その交叉形式が負定値であるものに対して、ある種のレンズ空間の対が生成されることを示し、ホモロジー同境群の構造の一部を明らかにした。

研究成果の概要（英文）：The cobordism relations regarding several 3 dimensional manifolds as boundary components of a 4 dimensional manifold is one of the important object to study on the fundamental building block of 4 dimensional manifolds. In this research, we investigated the moduli spaces of flat connections over 4 dimensional manifolds to study cobordism relations. In particular, for cobordisms among 3 dimensional manifolds called lens spaces which have negative definite intersection forms, we have shown a generation of certain pair of lens spaces in the cobordism. By using this result, we clarify a certain structure of the homology cobordism group of homology 3 spheres.

研究分野：4次元トポロジー

キーワード：ゲージ理論　負定値同境　平坦接続　インスタントン　レンズ空間　ホモロジー同境群　チャーン・サイモンズ不変量　有理ホモロジー球面

１．研究開始当初の背景

３次元球面の k 次元ホモロジー群は, k=0,3 のとき整数群 **Z** と同型であり，k がその他の場合は 0 のみからなる群である．閉３次元多様体のホモロジー群が３次元球面のそれと同型なものは, ホモロジー3 球面と呼ばれる．また，二つの向き付けられた閉３次元多様体が，向き付けられた滑らかなコンパクト４次元多様体の境界であるとき，それらは同境であると呼ばれ，さらに境界からの包含写像が誘導するホモロジー群の準同型が同型であるとき，それらはホモロジー同境であるという．ホモロジー３次元球面全体のホモロジー同境類全体の集合は，連結和の演算によってアーベル群の構造を持ち，ホモロジー同境群と呼ばれている．ホモロジー同境群の構造は, 少なくとも現時点において，整数群の無限個の直和を含むことの他は，未知であるといってよいと思われる．

ホモロジー同境群の構造を調べる方法は, 少なくとも大きく分けて二つ考えられる．一つは Kirby 算法であり，４次元球体の境界に把手を貼り付けていくことで，二つの３次元多様体が同境であることを示すことであり, もう一つの方法は，二つの３次元多様体のホモロジー同境不変量が異なることを確かめることで，それらが同境でないことを示すことである．

松本幸夫氏は, ホモロジー3 球面に対して, それを境界に持つコンパクトで滑らかなスピン４次元多様体の交叉形式 $2pE_8+qH$ における q の最小値として，bounding genus を定義し，Kirby 算法を駆使することで，それらの上界を与えた．実際，ホモロジー3 球面の bounding genus が 0 であれば，3 球面そのものにホモロジー同境である．松本氏は, それらの上界を考察することにより，任意の滑らかなスピン４次元閉多様体の符合数の絶対値の 11/8 が, その第２ベッチ数以下であるとする「11/8 予想」を提唱した．

一方，ホモロジー同境不変量は，４次元多様体の符号数を用いて定義された古典的な Rohlin 不変量が知られている．また，1980 年代にインスタントン・ゲージ理論と呼ばれる物理の理論を４次元多様体論に応用して発展した Donaldson 理論をはじめ，1990 年代にその等価な理論として発展した，Seiberg-Witten 理論により，4 次元多様体の微分構造を深く調べる手法が得られた．さらに A. Floer により，３次元多様体上のゲージ場の空間上の Morse ホモロジーの理論とし展開された，Floer ホモロジー理論を用いることにより，K. Froyshov によって h-不変量と呼ばれるホモロジー同境不変量が構成された．また，一方，P. Ozsvath と Z. Szabo 氏は，３次元多様体の Heegaard 分解に擬正則円板の理論を展開しており，d-不変量が構成されている．

古田幹雄氏は, Seiberg-Witten 方程式の有限次元近似により閉スピン 4 次元多様体に対する 10/8-不等式を導出し，これによって同境の複雑さを捉える一つの方法が得られたといえる. 筆者はこの 4 次元 V 多様体の 10/8 不等式を用いて，古田氏との共同研究で導入した w 不変量による bounding genus の下限を与える公式を導出し，松本氏による結果と組み合わせることにより, Seifert ホモロジー3 球面の幾つかの無限族に対して bounding genus の値を決定した.

筆者はこれまで，3 次元多様体の同境圏の構造を捉える一つの試みとして，以下に関する結果を得た.

（１）同境圏からある代数的圏への函手，およびそれに付随した非結合的代数の構成.

（２）二つの 3 次元多様体とその代数的射に付随した「長さ」の導入と，その w 不変量による下限の導出.

実際，上記の非結合的代数は，与えられた代数的射を実現する同境の存在に関する位相的な障害を与える．また, bounding genus の一般化として，3 次元多様体の間の「長さ」を，与えられた代数的射を実現する符号数 0 のスピン同境の正の第２ベッチ数の最小数として定め, 古田氏と亀谷幸生氏による 10/8 不等式を用いてその下界を与えた.

２．研究の目的

有理ホモロジー3 球面全体のなす有理ホモロジー同境群の構造は, (3+1)次元の位相的場の理論の発展により，K. Froyshov の h-不変量や P. Ozsvath-Z. Szabo の d-不変量をはじめとするホモロジー同境不変量を用いた多くの結果が得られている．一方，系の時間発展を相当する同境の特徴付けは，これからの課題といえる．本研究では，同境を射とみなした精密化に相当する同境圏に対して，以下の 2 点に着目しながら，ゲージ理論を応用することにより，その構造を明らかにすることを目的とする.

（１）管状の端を持つ 4 次元多様体上のインスタントンと 3 次元多様体の Chern-Simons 不変量

（２）3 次元多様体の指標多様体とインスタントン・モジュライ空間の端の構造

３．研究の方法

本研究では，以下の 2 つの項目を支柱として研究を遂行した.

（１）管状の端を持つ 4 次元多様体上のインスタントンと 3 次元多様体の Chern-Simons 不変量

これまでの古田幹雄氏との共同研究では，レンズ空間の間の滑らかな負定値同境に付随して構成されるオービフォルドを用いた議論を，管状の端をもつ滑らかな 4 次元多様体上の議論に拡張することにより，幾つかのレンズ空間から整係数ホモロジー球面への滑らかな負定値同境が誘導する代数的射の必要条件を，ホモロジー球面の Chern-Simons

不変量と，同境の整数係数１次元ホモロジー群から U(1)への準同型によって与えた．実際，同境に管状の端を付け加えた滑らかな４次元多様体上のエネルギー$1/m$ をもつ SU(2)インスタントンのモジュライ空間を考察することにより，管状の端に向かって逃げ去るインスタントンの列の弱極限として平坦接続が得られ，さらに摂動により可約平坦接続が得られる．本結果は，レンズ空間の管上の $1/m$ インスタントンのモジュライ空間が $\mathbf{R}$ と同相になることを用いており，４次元球面上の同変インスタントンに関する古田氏と橋本義武氏の結果を適用することにより，一般のレンズ空間や球面空間型に対して議論することが可能になる．そこで，幾つかの球面空間型の非交和から有理係数ホモロジー球面への負定値同境に対して，そのコホモロジー環における代数的射を特徴付ける研究を行った．

（２）3 次元多様体の指標多様体とインスタントン・モジュライ空間の端の構造
3 次元多様体上の SU(2)平坦接続のモジュライ空間は，基本群の SU(2)表現全体の共役類である指標多様体であり，管上のインスタントンの管の端における極限として現れる．Hedden, C. Herald と Kirk は，3 次元球面における結び目に対し，P. Kronheimer と T. Mrowka による被約インスタントン鎖複体の生成元に対応する，以下の対象を考察した．それは, 4 点穴空き球面の基本群の零跡 SU(2)表現空間であり，位相的には 2 次元球面に 4 点の特異点を持つオービフォルドの構造を持ち, 以下, これを枕袋(pillowcase)とよぶ．実際，結び目をある 3 次元球体に含まれる自明な 2 本タングルと，その外側における 2 本タングルに分解し，それぞれの補空間の基本群の零跡 SU(2)表現空間を考え，4 点穴空き球面の基本群の零跡 SU(2)表現空間における Lagrange 交叉を考察するものである．ここで，3 次元球体の自明な 2 本タングルの表現空間においては，耳飾付き零跡 SU(2)表現空間に対して，タングルの補空間における閉曲線に沿ったホロノミー摂動を明示的に与え，その枕袋における像を決定した．
筆者は，インディアナ大学の P. Kirk 氏と J. Pinzon-Caicedo 氏との共同研究により，トーラス結び目やプレッツェル結び目に対して枕袋における表現空間の像を明示的に計算し，その Lagrange 交叉が被約インスタントン鎖複体の生成元に対応していることを観測した．また，SU(2)表現と 2 本タングルで分岐するの二重分岐被覆の SO(3)表現との関係から，2 本タングルの零跡 SU(2)表現空間において，双二面体群に退化するものを完全に分類し，さらに枕袋における像がそのオービフォルド被覆における，幾つかの直線分になることを示した．そこで，トーラス結び目や，プレッツェル結び目の無限族に対して，2 本タングルの補空間の基本群の零跡 SU(2)表現空間とその枕袋への像を特徴付けることが課題となる．

４．研究成果
（１）管状の端を持つ 4 次元多様体上のインスタントンと 3 次元多様体の Chern-Simons 不変量
本研究では，古田氏との共同研究を発展させることにより以下の結果を得た．結果①と③の一部に関しては研究集会「微分トポロジー15」において，②と③に関しては，関西ゲージ理論セミナー，および，鹿児島大学数理情報科学談話会において発表を行った．また，④に関しては，学習院トポロジーで発表を行っている．結果①と②をまとめた論文は，現在，国際雑誌に投稿中である．

① 有理係数ホモロジー球面からレンズ空間へのある負定値同境の境界に$(m,1)$型レンズ空間が存在すれば，必ず境界には$(m,-1)$型のレンズ空間も存在する．さらに，同境上の U(1)平坦接続であって，その二つのレンズ空間上に制限すると m 次巡回群の標準的な U(1)表現を与え，その他の成分では自明になるものが存在する．

実際，インスタントンのエネルギーが４次元多様体の端の遠方に逃げていく現象の解析において，そのエネルギーが３次元多様体の管の端に逃げていくエネルギーに満たなければ，その方向に逃げていく可能性は考慮しなくてよいことがわかる．また，同境の 1 次元ベッチ数を零にするために，境界を有理ホモロジー球面とした．
U(1)平坦接続の存在を示すために，レンズ空間の管の端に逃げていった同境上のインスタントンの極限として収束していく SU(2)束のモジュライ空間を摂動する必要があった．そのために，Donaldson によって導入された接続のホロノミーを用いて方程式を摂動するホロノミー摂動の手法を用いる．本研究では，Kronheimer によるホロノミー摂動の定式化を採用した．また，K. Uhlenbeck の除去可能特異点定理を用いるため，インスタントンのエネルギーがホロノミー摂動の台の一部に集中する場合には摂動を掛けないようにした．
また，自明な平坦接続が孤立していることを利用して，同境上のインスタントンが，閉曲線族のホロノミーが自明な平坦接続のそれに近づいたときに摂動を掛けないようにすることで，管上のインスタントンと同境上の自明な接続との貼り合わせの議論を摂動のない状況で行えるようにした．
有理ホモロジー球面から幾つかのレンズ空間への負定値同境を議論していたが，有理ホモロジー球面を一般の 3 次元多様体に置き換えて議論することが可能であると考えられる．尚，この議論では，既約なインスタントンの摂動のみが必要であったが，モジュラ

イ空間の向きを含めた議論を行うためには，可約平坦接続に収束していくモジュライ空間の端を考察するために，可約なインスタントンの摂動が必要となり，今後の課題である．

② 上記の①の結果を応用することにより，整係数ホモロジー3 球面のホモロジー同境群における部分単系としての無限一次独立系を構成した．即ち，n が 3 以上として，互いに素な整数の組み$(a_1,\cdots,a_n)$を Seifert 不変量とする Seifert 整係数ホモロジー3 球面であって，a_1が a_iの最大値，かつ $a_1\cdots a_n$が a_1を法として1に等しいもの全体の集合において，その任意の有限個の連結和は，滑らかな整係数ホモロジー4 球体の境界になり得ない．

実際，Seifert ホモロジー3 球面は，その各特異ファイバーに対応して定まるそれぞれのレンズ空間の直和との間に自然な負定値同境が定まる．その中には$(m,1)$型のレンズ空間が一つ含まれるが，$(m,-1)$型のレンズ空間が含まれない．上記の Seifert ホモロジー3 球面の族の幾つかの整係数一次結合がホモロジー同境群の中で零であるとすると，それらの Seifert ホモロジー3 球面からなる直和が負定値同境を持つことになる．この同境に対して，①の結果を適用することにより，$(m,1)$型のレンズ空間の対となる$(m,-1)$型のレンズ空間が存在することになり，上記の構成に矛盾することから従う．

この議論では，レンズ空間を境界とする，ある負定値同境に$(m,1)$型のレンズ空間が存在すれば，$(m,-1)$型のレンズ空間も存在するという現象を用いているが，それらが同境上の U(1)平坦接続で関連し合っているという事実は用いていない．この U(1)平坦接続を用いることによって，ホモロジー同境群に関する，より深い情報が得られると期待される．

③ ①の結果を$(m,1)$型のレンズ空間に限らず，a が b よりも十分に大きいという条件のもとで(a,b)型のレンズ空間の場合に，その一般化を行った．また，これに対応して，②の議論を用いることで，より広いクラスの Seifert ホモロジー球面の無限族がホモロジー同境群の中で一次独立であることがわかる．

④ 有理ホモロジー3 球面の Bounding genus と Neumann-Siebenmann 不変量
松本幸夫氏による 11/8 予想において導入された整係数ホモロジー3 球面のホモロジー同境不変量である Bounding genus を，二つの有理ホモロジー３球面に対するある種の距離として一般化した．
w 不変量および，上正明氏によって Seifert 有理ホモロジー球面の場合にその等価性が証明されている Neumann-Siebenmann 不変量による下からの評価，およびその枠付き絡み目表示から，結び目の 4 球体種数による上からの評価を行った．

（2）3 次元多様体の指標多様体とインスタントン・モジュライ空間の端の構造

インディアナ大学の P. Kirk 氏とジョージア大学の J. Pinson-Caicedo 氏との共同研究において，以下の結果が得られた．本結果①は，雑誌 Math. Proc. Cambr. Phil. Soc.162 (1) に掲載されており，N-KOOK セミナーで研究発表を行った．

① 整係数ホモロジー3球体における 2 本のタングルの補空間の基本群の零跡 SU(2)表現空間で双二面体群に退化するものを完全に決定した．正確には，双二面体群は SU(2)の部分群であり，SU(2)を単位四元数 Sp(1)と同一視したときに，Sp(1)における$(1,k)$平面上の単位円と(i,j)平面上の単位円によって生成される群で，Pin(2)とも呼ばれる．そしてタングルの補空間の基本群の SU(2)表現で，メリディアン・ループの像が，(i,j)平面上の単位円に入るものを，零跡双二面体表現と定義している．これまで $\mathbf{Z}_2$ 係数ホモロジー3 球体の 2 本のタングルを考察していたが，$\mathbf{Z}$ 係数のホモロジー3 球体を対象とすることで，議論が単純かつ明瞭となった．

実際，零跡双二面体表現全体は，ホモロジー球体上，2 本タングルで分岐する二重分岐被覆の１次元整係数ホモロジーH の S^1 表現全体を，複素共役による対合で割ったものと一対一対応することがわかる．それらは，H のねじれ部分群の位数を n としたとき，1 本の弧と，$(n-1)/2$ 本の円周からなる．さらにそれらを境界の４点穴開き球面の基本群の零跡 SU(2)表現空間（枕袋）における像に制限すると，全てが枕袋の普遍被覆上で直線分となって現れることがわかる．$\mathbf{Z}_2$ 係数ホモロジー3 球体の 2 本のタングルの場合には，H のねじれ成分に被覆変換の対合に関する+1 固有空間 A_+が現れ，H/A_+の S^1 表現空間を考察する必要があるが，整係数ホモロジー球体とすることで，A_+を 0 とできる．

この研究では，幾つかのトーラス結び目やプレッツェル結び目に対して枕袋における表現空間の像を明示的に計算し，その Lagrange 交叉が被約インスタントン鎖複体の生成元に対応していることを観測している．これを一般のトーラス結び目，およびプレッツェル結び目に対して行うことが課題として考えられる．また，タングルの綾関係に関して表現空間がどのように振る舞うかを調べることも課題として考えられる．双二面体表現は，枕袋上の像が直線分であり，Lagrange 交叉を数えやすい．これが，被約インスタントン鎖複体の生成元としてどのような役割を持つかを理解することで，結び目の Kronheimer-Mrowka の特異インスタントン・ホモロジーにおける役割も観測できるものと期待される．さらに，2 本タングル零跡 SU(2)表現の複素化として SL(2,$\mathbf{C}$)表現

を考えることも可能であり，4 点付き球面上の放物的 Higgs 束のモジュライ空間で捉えることも今後の課題である．

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕（計　1　件）

1. FUKUMOTO, Y., KIRK, P., & PINZÓN-CAICEDO, J. (2017). Traceless SU(2) representations of 2-stranded tangles. Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 162(1), 101-129.（査読あり）
doi:10.1017/S0305004116000360

〔学会発表〕（計　5　件）

1．福本善洋，レンズ空間の負定値同境におけるインスタントン，数理情報科学談話会，2016 年 11 月 30 日，鹿児島大学（鹿児島県鹿児島市）
2．福本善洋，レンズ空間の負定値同境とホモロジー同境群，関西ゲージ理論セミナー，2016 年 11 月 12 日，京都大学(京都府京都市)
3．福本善洋，2-タングルのトレースレス SU(2)表現について，N-KOOK セミナー，2016 年 4 月 6 日，大阪市立大学文化交流センター(大阪府大阪市)
4．福本善洋，レンズ空間から有理ホモロジー球面への負定値同境について，微分トポロジー 15～微分トポロジーの過去・現在・未来～，2015 年 3 月 26 日，京都大学(京都府京都市)
5．福本善洋，Bounding genus と Neumann-Siebenmann 不変量，学習院トポロジーセミナー，2014 年 11 月 26 日，学習院大学(東京都豊島区)

〔その他〕
ホームページ等
Yoshihiro Fukumoto’s Homepage
http://www.math.ritsumei.ac.jp/~yfukumot/index.html

６．研究組織

(1)研究代表者
立命館大学・理工学部・教授
福本　善洋（FUKUMOTO　YOSHIHIRO）
研究者番号：90341073