

平成 29 年 4 月 20 日現在

機関番号：10101
 研究種目：基盤研究(C) (一般)
 研究期間：2014～2016
 課題番号：26400102
 研究課題名(和文) C*スター環上の流れについての研究

研究課題名(英文) Flows on C*-algebras

研究代表者

岸本 晶孝 (KISHIMOTO, AKITAKA)

北海道大学・・・名誉教授

研究者番号：00128597

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,000,000円

研究成果の概要(和文)：位相的力学系に付随したバナッハスター環の既約表現について、その構成方法の手順を与え、その手順のなかで自明でない部分、エルゴード的拡張が実際に実行可能であることを二つの例、ベルヌーイ変換と無理数回転の場合に示す。エルゴード的拡張とは、離散的でない確率測度空間上のエルゴード変換に対して、そのI型因子環との接合積上のエルゴード変換に拡張できるかという問題である。(離散的な場合には存在しない。実際に示したものは有限I型の場合である。)一般的に可能かどうかについては未解決だが、例を見る限りその証明はもとのエルゴード変換の詳細な性質に依存する。

研究成果の概要(英文)：We show how to construct irreducible representations of the Banach *-algebra associated with a dynamical system in general, which consists of two major procedures including what we call ergodic extension. An ergodic extension of a ergodic transformation on a (quasi-invariant) non-atomic probability measure space is an extension of the given one to an ergodic transformation of the system obtained by tensoring with a Type I factor. It is not clear this is at all possible. We were unable to prove this in general but show this is possible by two examples in the finite type I case, Bernoulli shifts and irrational rotations, whose proof depends on detailed property of these transformations.

研究分野：作用素環

キーワード：力学系 接合積 バナッハスター環 C*スター環 既約表現 エルゴード変換 エルゴード拡張

1. 研究開始当初の背景

自由度が無限の量子系を記述する数学的枠組みとして、ヒルベルト空間上の作用素の理論に代わって C スター環の理論が 1940 年代に提唱された。C スター環とその上の時間の流れ (1 径数自己同型群) 及びその生成作用素たる可能性を秘めた微分に関する基本的事項は、その平衡状態に関する理論 (富田竹崎理論) とともに 1980 年頃に出版された Bratteli、Robinson 両氏の教科書に詳しい。この本は今も大いに参照され、申請者もまた、その先駆者である境氏の研究を参照しながら些かの寄与をなした。しかしながらその後この研究は予期されたほどの結果をうみださなかったが、申請者は流れと微分について改めて研究を始めた。たとえば 1990 年代に流れに対して Rohlin の性質を導入した (これはひとつの自己同型、また離散群の自己同型による作用に対して導入されていた概念である)。これは物理的モデルから得られる流れと対極にあるものといえるが、それだけにコサイクル共役類の分類になじみやすいと考えられる。物理的モデルから得られる流れは、Rohlin 流れの場合と違い内部近似的という条件を満たす。これは、いわゆる平衡状態をもつなどはるかに多様性を有していて、上記の意味での分類には手に届きそうにないが、境氏の当初の結果は微分の理論をも含めて理解が進むことを期待させたのである。そう簡単ではないことが判明したが、C スター環の分類理論の発展もあり申請者はこの場合についてものちにいくつかの概念を導入して研究することにした。

2. 研究の目的

上に述べたように、流れに対していくつかの概念が導入されているがその間の関係についてしらべることが目的のひとつである。たとえば流れが内部近似的であるという条件に対して、「連続的に内部近似的」であるという条件を定義した。従来知られている内部近似的な例は実はすべて連続的に内部近似的であるか、あるいは不明であるかのいずれかである。(連続的に内部近似的ならばリフティングが可能。リフティングの問題は 1970 年代には盛んに論じられたが連続的に内部的という条件を導入することですくなくとも可分である場合には統一的に扱えることが分かった。) 問題はこの両者が本当に異なる概念化どうか不明な点である。(ひとつの自己同型に対して同様の定義が可能であるが、この場合には両者の概念は KK 理論で区別できる。

流れの場合には KK 理論は自明な要素しかもたらさないのと同じようにはゆかないようである。)

流れが内部的に近似的であるという条件に対して「準対角的」という条件を定義した。このときには C スター環も準対角的になる。(流れが準対角的であるとは、流れがある弱い意味で行列上の、同じことだが有限次元 C スター環上の流れで近似できるということで、これは C スター環も準対角的、つまり行列である弱い意味で近似できることを意味する。もし C スター環のカテゴリーの中で有限次元 C スター環で近似できるといえば、つまり有限次元 C スター環の帰納的極限で定義されれば、それはいわゆる AF 環を意味するが、ここでの「近似」はそれよりはるかに弱い。) 内部近似的であれば準対角的である。問題は C スター環が物理モデルで現れるような条件をもってもこの両者の条件に違いがあるかということである。(実は、有限 C スター環の場合、流れが内部近似的でないことを示すのに、ある逆温度に対して平衡状態 (KMS 状態) が存在しないという事実が使われる。準対角的流れに対しては、内部近似的な場合と同様平衡状態が存在するのでこの論法は使えない。)

大きな問題としては内部近似可能な流れに対するコサイクル共役類の分類である。流れよりできる接合積とその上の双対流れの分類の問題にほぼ焼きなおせそうだが、このことを使うことを考える。

途中より、以上とは少し毛色が変わるが、コンパクト空間上の整数の作用よりなる力学系も考察の対象に加えた。(当然流れも問題にするべきところだがまず簡単な場合を考えることが常道である。) その力学系よりできる接合積の既約表現についての解析、及びその要素が具体的に書けるバナッハスター環についての研究を目的とする。

3. 研究の方法

以上の目的は主に解析的手法を使う範疇にあり、関数解析的手法と、その作用素環という対象へのやや特殊化された手法を使う。現在 C スター環の分類論のなかで使われているような代数的手法も使いたい、これまでのところ流れの解析には直接的には使えそうにない。上記の目的の達成のためには、いわゆる普遍量なるものを導入する必要があると思われるが、それには代数的手法が必要になると思われるが、これについては明確な手法が描けていない。

4. 研究成果

実のところまとまった結果が得られたのは力学系についての問題だけである。

力学系として一番簡単な、コンパクト空間上とその上の同相写像よりなる力学系を考える。この共変表現とは、あるヒルベルト空間上に、コンパクト空間上の連続関数よりなるCスター環を表現し、同時にそのうえのユニタリ作用素を指定して、それが同相写像を引き起こすようにすることである。その両者(連続関数環の像とユニタリ)が、ヒルベルト空間上のすべての作用素よりなる環を弱位相閉の*代数として生成するとき、これを既約であるという。まずこの既約共変表現を構成する手続きについて考察して、それは主に次の二つの段階よりなることを示した。最初まずコンパクト空間上にエルゴード的な既約共変確率測度を与える。(これについては抽象論よりたくさん存在することが知られているが、以下に述べる無理数回転の場合には具体的な構成の仕方を与えた。)次にこれを、I型因子環との接合積上のエルゴード変換に拡張する(正確には確率測度空間上の有界関数環との接合積)。不思議なことにこの後者の部分が従来考えられなかった事柄で、いまだ非自明な場合に一般に可能かどうか分かっていない(測度が離散的な場合は真なる拡張は存在しないので、これ以外の場合に存在するかどうかということ)。この問題を次のふたつの例で考えた。ひとつはベルヌイ変換で、確率測度としては無限直積を選ぶと、少なくとも有限I型因子環(行列環)の場合には上記エルゴード拡張が可能である。もうひとつは無理数回転で、円周上の確率測度としてはルベグ測度をとる。このときにも有限I型因子環との接合積のエルゴード変換への拡張が可能である。(証明には無理数の連分数展開を使い、この変換の特殊性、ルベグ測度の特殊性に依存する。)以上二つの場合、そのような拡張は無限に存在する。(以上から分かるように、無限I型因子環の場合には分かっていないし、有限I型因子環の場合でもまだ明らかにしたい事柄がたくさんある。)

既約共変表現の構成の仕方の応用として、この表現の、 L^1 バナッハスター環への制限がある弱い条件のもとで代数的に既約でないことを示した(この条件が満たされないことがあるかどうかはいまだ分かっていない)。もちろんCスター環の表現としては代数的に既約である。これは当然予想されることだが、その他このバナッハスター環の性質について調べることは意義あることだと思え、今も続行中である。以上は富山淳氏との共同研究である。

Cスター環上の微分とは、その稠密な*部分環上で定義されたライプニッツの条件を満たす*線形な写像のことで、それがいつ流れを生成するかは以前より問題であった。関数解析からの一般論の焼き直しとして、流れを生成するためには2種類の条件を満たす必要があることが知られているが、そのなかで局所的条件について考察を進めた。(他の一つは大局的条件で、それを他の分かりやすい同値な条件で置き換えることは困難に思えるので、考察の対象から除いた。)それは「生成作用素への拡張可能性」という形でまとめられるが、それについて他の条件との関連性を含めてさらに考察を進めている。(通常は、これはwell-behavedといわれる条件とされるが、これはもうひとつの大局的条件と組み合わせたときのみ十分強い条件だと分かる。今この後者の条件を考えないことにするので、上記条件が必要となり、他のよく知られた条件との関係を調べることが必要になった。)

さらに、流れに対するMF性という性質に対応して、微分にもMF性を導入した。(これは一般には内部近似性よりは弱い条件と考えられるが、もとの趣旨は「行列上の微分で近似できる」という意味であった。内部近似性とは関係がない。またもう一つの準対角性を微分にも求めるという問題があるが、有用な形ではまとまらなかった。)これはその有用性については不明な、かなり複雑な特徴づけをもつが、MF性そのものは、「遺伝性」が高いのである種の操作に対してその性質が保存されることを確かめることができる。それに対して「内部近似性」は、それと定義されたものを除き、確かめることがしばしば困難であるが、両者は物理的観点からは同様の性質をもつ(ある種の内部近似性及び平衡状態の存在)。はたしてMF性が内部近似性の代わりになるかは今も調べている。

観測の問題に関しては以前からの継続である。Bratteli-Robinsonの本より始まって「流れ」にばかり注目してきたが、観測は、非可逆的で、流れにならない(時間をさかのぼれない)例を与える。つまりCスター環の枠組みでは、自己同型ではなく(単射だが全射でない)準自己同型になるような場合であり、量子力学の可逆性から割と自然に無限自由度系(Cスター環の用語でいえば非I型Cスター環)の非可逆な一方向の流れが出てくるように思える。この観点から観測の問題を見直すと、いわゆる波動関数の収縮が自然とおこる現象であって、観測はその現象の解釈であるということになる。

5. 主な発表論文等
(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 1件)

1. A. Kishimoto and J. Tomiyama,
Topologically irreducible
representations of the Banach
*-algebra associated with a dynamical
system,
査読あり、doi:10.1017, 2017
(他の情報は未定)

[学会発表](計 4件)

1. A. Kishimoto,
Approximately inner derivations,
17th Danish-Norwegian OA Workshop,
Jan. 7th, 2017
Oslo, Norway
2. A. Kishimoto,
Ergodic Extensions,
44th Canadian Annual Symposium on
Operator algebras and their
Applications,
June 13th, 2016,
Montreal, Canada
3. A. Kishimoto
International Conference on
C*-algebras and Dynamical systems in
honor of George Elliott's seventieth
birthday,
July 1st, 2015,
Shijiazhuang, China,
4. A. Kishimoto,
A mathematical model for
measurements,
ICM Satellite Conference on Operator
Algebras and Applications,
Aug. 10th, 2014,
Cheongpung, Korea.

[図書](計 0件)

[産業財産権]

出願状況(計 0件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

取得状況(計 0件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

[その他]
ホームページ等

6. 研究組織

- (1)研究代表者
岸本 晶孝(Kishimoto Akitaka)
北海道大学・ - ・名誉教授
研究者番号：00128597

- (2)研究分担者
なし
()

研究者番号：

- (3)連携研究者
なし
()

研究者番号：

- (4)研究協力者
なし
()