

令和元年6月20日現在

機関番号：11501

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2014～2018

課題番号：26400105

研究課題名(和文)楕円代数を対称性にもつ可解模型の自由場表現による研究

研究課題名(英文)Free field approach to solvable models associated with elliptic algebra

研究代表者

小島 武夫(Kojima, Takeo)

山形大学・大学院理工学研究科・教授

研究者番号：80307800

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,500,000円

研究成果の概要(和文)：量子可積分系を頂点作用素の方法により研究した。模型の対称性・頂点作用素・基底状態の自由場表示(微分作用素による表示)に集中的に取り組んだ。最も重要な成果は、(A) 量子超代数 $U_q(\mathfrak{sl}(M|N)^\wedge)$ の一般のレベル k での自由場表示の構成、である。このほかの大きな成果としては、(B) 対角でない開境界条件における XXZ スピン鎖の相関関数・形状因子の積分表示・無限積表示の構成、(C) 量子超代数 $U_q(\mathfrak{gl}(N|N)^\wedge)$ 対称性の対角開境界 XXZ スピン鎖の基底状態の自由場表示の構成、(D) 量子超代数 $U_q(\mathfrak{sl}(M|N)^\wedge)$ の頂点作用素の交換関係の自由場表示を用いた直接証明、があげられる。

研究成果の学術的意義や社会的意義

頂点作用素の方法による量子可積分系の研究に、新たな可能性を広げた。特に、真に新しい例の構成を通じて、頂点作用素の方法の適用範囲を広げた。まず、対角でない開境界での相関関数の積分表示の構成の最初の例を与えた。さらに、量子群の一般のレベル k での自由場表示の構成は、わずか2つの例($U_q(\mathfrak{sl}(N)^\wedge)$ および $U_q(\mathfrak{sl}(M|N)^\wedge)$)しか知られていないが、そのうちの1つが本研究において構成された。また、 $U_q(\mathfrak{sl}(M|N)^\wedge)$ の頂点作用素の交換関係の直接証明により、楕円超代数 $U_q(\mathfrak{sl}(M|N)^\wedge)$ の頂点作用素の構成に向けた道筋がつけられた。

研究成果の概要(英文)：We study quantum integrable systems by the vertex operator approach. We focus our attention on free field approach (bosonization) of symmetry, vertex operator, and ground state. The most outstanding result is (A) a bosonization of quantum superalgebra $U_q(\mathfrak{sl}(M|N)^\wedge)$ for an arbitrary level k . We also obtain (B) integral representations of correlation functions and form factors of the XXZ chain with a triangular boundary, (C) a bosonization of ground state of quantum superalgebra $U_q(\mathfrak{gl}(N|N)^\wedge)$ -analogue of XXZ chain with a diagonal boundary, and (D) a direct proof of commutation relations of vertex operators for quantum superalgebra $U_q(\mathfrak{sl}(M|N)^\wedge)$ for level $k=1$.

研究分野：数学

キーワード：量子可積分系 量子群 自由場表示 超代数 頂点作用素 可解模型 開境界条件 スクリーニング

1. 研究開始当初の背景

量子可積分系の体系的研究は、20世紀初頭の Bethe 仮説法による Heisenberg 鎖の研究に端を発する。Bethe 仮説法は、量子逆散乱法へと発展し、模型の基底状態や励起状態のみならず、相関関数や形状因子の厳密解が構成された。量子逆散乱法以外の手法も発展してきた。本研究では、頂点作用素の方法 (Vertex operator approach) について考察する。頂点作用素の方法は、共形場理論・量子群・Baxter の角転送行列に影響を受けて発展した理論である。最初から熱力学的極限 (体積無限大の極限) を考察する点が、量子逆散乱法とは大きく異なる。熱力学的極限においては、模型の背後の対称性は無限次元の代数になり、理論の見通しが大変良くなる。熱力学的極限における相関関数に例を見ると、量子逆散乱法において相関関数の厳密解の熱力学的極限が構成されたのは、量子群 $U_q(\mathfrak{sl}(2)^{\wedge})$ 対称性の、周期境界条件もしくは対角開境界条件の場合のみに過ぎない。これに対し、頂点作用素の方法では、多くのアフィン・リー環に対応する量子群について熱力学的極限で相関関数が構成されている。(本研究では、対角でない開境界条件の相関関数の積分表示を初めて構成することになる。)頂点作用素の方法の本質は、その無限次元性にある。模型の対称性や頂点作用素の自由場表示 (微分作用素による無限次元表現) の構成が、頂点作用素の方法の重要な部分である。本研究では、自由場表現の構成に的を絞って、量子可積分系を研究した。

2. 研究の目的

量子群および楕円代数を対称性に持つ可解格子模型を考察する。模型の対称性・頂点作用素・基底状態などの自由場表示を構成し、その真空期待値を計算することで相関関数・形状因子の厳密解の積分表示を構成する。自由場表示の構成を通して、模型の背後の対称性についての理解も深める。

3. 研究の方法

量子可積分系を、自由場表現の方法により研究する。具体的には、模型の対称性・頂点作用素・基底状態などの自由場表示 (微分作用素による表示) を構成し、その真空期待値を計算することで相関関数・形状因子の厳密解の積分表示を構成する。

4. 研究成果

研究成果は大きく4つに分類される。

(1) 非対角開境界条件における $X \times X \times Z$ スピン鎖の相関関数・形状因子の構成 :

量子 $X \times X \times Z$ スピン鎖を熱力学的極限で考察した。境界条件は Boundary Yang-Baxter 方程式の三角行列解とした。基底状態と頂点作用素の自由場表示の真空期待値から、相関関数と形状因子の積分表示を構成した。1点相関関数については、積分をほどいて無限積表示を導いた。形状因子の持つ対称性から、多重積分の自明でない関係式を導いた。本研究は、対角でない開境界条件の相関関数の積分表示の最初の例となった。

(2) 量子超代数 $U_q(\mathfrak{gl}(N|N)^{\wedge})$ 対称性の開境界スピン鎖の基底状態の自由場表示 :

量子超代数 $U_q(\mathfrak{gl}(N|N)^{\wedge})$ スピン鎖を熱力学的極限で考察した。境界条件は Boundary Yang-Baxter 方程式の対角解とした。基底状態の自由場表示を、指数関数の肩に自由場の2次式を載せ真空に作用させることで構成し、論文にまとめた。対称性が $\mathfrak{gl}(M|N)^{\wedge}$ の退化部分 $M=N$ のため、相関関数の計算にはさらなる工夫の余地がある。ここで得られた結果を活用し、余分なパラメータを1つ入れ、その極限として相関関数をフォーマルに計算することができる。しかし、微分が入ったかなり複雑な積分表示になってしまう。より良い表示に変形するのが将来的なテーマである。

(3) 量子超代数 $U_q(\mathfrak{sl}(M|N)^{\wedge})$ の一般のレベルの自由場表示 :

量子超代数 $U_q(\mathfrak{sl}(M|N)^{\wedge})$ の自由場表示 (脇本表示) を一般の複素数レベル k で構成した。併せ、スクリーニング作用素、頂点作用素の自由場表示も構成した。報告者が2011年に構成した量子超代数 $U_q(\mathfrak{sl}(M|1))$ の自由場表示に関する研究の更なる高ランクへの一般化になっている。なお、一般のレベル k における量子群の自由場表示の構成は容易ではなく、本研究の他には、アフィン量子群 $U_q(\mathfrak{sl}(N)^{\wedge})$ の場合のみが知られているに過ぎない。

(4) 量子超代数 $U_q(\mathfrak{sl}(M|N)^{\wedge})$ の頂点作用素の交換関係の直接証明 :

量子超代数 $U_q(\mathfrak{sl}(M|N)^{\wedge})$ の頂点作用素の交換関係をレベル $k = 1$ で、自由場表示を用いた直接計算により証明した。この計算は、楕円量子超代数 $U_{qp}(\mathfrak{sl}(M|N)^{\wedge})$ の頂点作用素の自由場表示の構成に必要な不可欠なステップである。この結果を活用すれば、頂点作用素の楕円量子化も実

現可能である。

5 . 主な発表論文等

〔雑誌論文〕(計7件)

[1] T.Kojima, Commutation relations of vertex operators for $Uq(\mathfrak{sl}(M|N)^\wedge)$, J.Math.Phys. 59, 101701 (37pp) (2018) (査読有).

[2] T.Kojima, Wakimoto realization of the quantum affine superalgebra $Uq(\mathfrak{sl}(M|N)^\wedge)$, Springer Proceedings 263, 149-163 (2018) (査読有).

[3] T.Kojima, A bosonization of $Uq(\mathfrak{sl}(M|N)^\wedge)$, Commun.Math.Phys. 355, 603-644 (2018) (査読有).

[4] T.Kojima, Boundary state of $Uq(\mathfrak{gl}(N|N)^\wedge)$ analogue of half-infinite t-J model, J.Stat.Mech. P023108(38pp) (2016) (査読有).

[5] P.Baseilhac and T.Kojima, Form factor of the half-infinite XXZ spin chain with a triangular boundary, J.Stat.Mech.P09004 (34pp) (2014) (査読有).

[6] T.Kojima, Vertex operator approach to semi-infinite spin chain, Springer Proceedings 111,265-277 (2014) (査読有).

[7] P.Baseilhac and T.Kojima, Correlation functions of the half-infinite XXZ spin chain with a triangular boundary, Nucl.Phys.B880, 378-413 (2014) (査読有).

〔学会発表〕(計9件)

[1] T.Kojima, A bosonization of $Uq(\mathfrak{sl}(M|N)^\wedge)$, 32nd International colloquium on group theoretical method in physics, Prague, Czech Republic (2018).

[2] T.Kojima, A bosonization of $Uq(\mathfrak{sl}(M|N)^\wedge)$, 日本数学会, 山形大学 (2017).

[3] T.Kojima, A bosonization of $Uq(\mathfrak{sl}(M|N)^\wedge)$, 8th Mathematical physics meeting, Belgrade, Serbia (2017).

[4] T.Kojima, A bosonization of $Uq(\mathfrak{sl}(M|N)^\wedge)$, 12th International workshop "Lie theory and its application in physics, Varna, Bulgaria (2017).

[5] T.Kojima, A bosonization of $Uq(\mathfrak{sl}(M|N)^\wedge)$, Seminar at University of Leeds, UK (2017).

[6] T.Kojima, A bosonization of $Uq(\mathfrak{sl}(M|N)^\wedge)$, Seminar at University of Lyon, France (2017).

[7] T.Kojima, A bosonization of $Uq(\mathfrak{sl}(M|N)^\wedge)$, Seminar at University of Tour, France (2016).

[8] T.Kojima, Vertex operator approach to semi-infinite spin chain, Workshop "Search for classical analysis and quantum integrable systems", Kyoto University, Japan (2014)

[9] T.Kojima, Vertex operator approach to semi-infinite spin chain, 7th Mathematical physics meeting, Belgrade, Serbia (2014).

〔図書〕(計0件)

〔産業財産権〕

出願状況(計0件)

名称:

発明者:

権利者：
種類：
番号：
出願年：
国内外の別：

取得状況（計 0 件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等

<http://bt.yz.yamagata-u.ac.jp/mathematics/kojima/kojima.html>

6 . 研究組織

(1)研究分担者

研究分担者氏名：
ローマ字氏名：
所属研究機関名：
部局名：
職名：
研究者番号（8桁）：

(2)研究協力者

研究協力者氏名：
ローマ字氏名：

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。