様　式　C－19、F－19－1、Z－19　（共通）

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ３０ 年　 ６ 月 １５ 日現在

機関番号：１２１０２
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2014～2017
課題番号：２６４００１０６

研究課題名（和文）可積分系に現れる差分方程式の代数解析

研究課題名（英文）Algebraic analysis of difference equations arising from integrable systems

研究代表者
竹山　美宏（TAKEYAMA, Yoshihiro）

筑波大学・数理物質系・准教授

研究者番号：６０３７５３９２

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,600,000円

研究成果の概要（和文）：本研究では、可積分確率過程と多重ゼータ値のq類似について、その代数的な構造を考察した。可積分確率過程については、アフィンヘッケ代数と呼ばれる非可換代数の変形の表現論を用いて、新たなモデルを構成した。そのうち、多種粒子q-ボゾン系と呼ばれるものに対し、その生成作用素の固有関数の明示的な公式を得た。多重ゼータ値のq類似については、パラメータqを1のベキ根に特殊化して得られる有限和から、有限多重ゼータ値および対称多重ゼータ値という整数論的な対象が同時に得られることを発見した。

研究成果の概要（英文）：We studied algebraic structure of integrable stochastic systems and a q-analogue of multiple zeta values (qMZV). First, we constructed new integrable stochastic systems using a representation of a deformation of the affine Hecke algebra. Regarding the multi-spices q-Boson model, which is an integrable stochastic system constructed as above, we obtained an explicit formula for eigenfunctions of its generator. Second, we found that the finite sum obtained by setting the parameter q in qMZVs to a root of unity simultaneously produces important objects in number theory called finite/symmetrized multiple zeta values.

研究分野：数理物理学

キーワード：可積分系　確率過程　多重ゼータ値　q類似

１．研究開始当初の背景

本研究では、以下に挙げる二つの対象について考察する。

(1) 可積分な確率過程

確率モデルの研究では、考察したい量の漸近挙動を調べることが重要な問題である。このような量が、極限をとる前の(有限の)段階でその表示式が閉じた形で書き下せ、そこから漸近挙動を完全に計算できる確率モデルを、可積分な確率過程と呼ぶ。

可積分な確率過程のなかでも、Borodin と Corwin が構成した Macdonald 過程は数学の様々な分野から注目されていた。この確率過程の確率測度は、Macdonald 多項式と呼ばれる多変数直交多項式の特殊値で定義される。Macdonald 過程が含むパラメータの極限を取ると、1 次元の完全非対称単純排他過程など、様々な可積分確率過程が得られる。

Macdonald 多項式の性質は、二重アフィンヘッケ代数と呼ばれる非可換代数の表現論によって系統的に理解できることが知られている。Macdonald 過程も二重アフィンヘッケ代数と関係することが期待されるが、この観点からの研究はあまり行われていなかった。

(2) 多重ゼータ値の q 類似

リーマン・ゼータ関数の 2 以上の整数点における特殊値は、自然数の負ベキの無限和である。多重ゼータ値はこれを多重無限和に拡張したものである。多重ゼータ値に関する基本的な問題は、それらが有理数体上で張る線形空間の構造を明らかにすることである。

多重ゼータ値は以下のように可積分系と関係する。アフィンリー代数の対称性をもつ共形場理論における相関関数は、Knizhnik-Zamolodchikov 方程式(KZ 方程式)と呼ばれる微分方程式を満たす。KZ 方程式にはリー代数の Casimir 元が係数として現れるが、これを非可換な不定元に置き換えた方程式(形式的 KZ 方程式)を考えると、そのモノドロミーが多重ゼータ値で記述できる。そして、このモノドロミーがもつ性質から、多重ゼータ値の線形関係式が得られる。

多重ゼータ値は自然数の負ベキの無限和であるが、この自然数の部分をパラメータ q の関数(q 整数)に置き換えたものが、多重ゼータ値の q 類似である。多重ゼータ値の線形関係式の一部は、q 類似についてもそのまま成り立つことが知られていた。そこで、q 類似の場合についても、形式的 KZ 方程式に対応する差分方程式があり、そのモノドロミーの性質から線形関係式を導出できることが期待される。

２．研究の目的

(1) 可積分な確率過程について

研究代表者は以前の研究で、O'Connell-Yor モデルと呼ばれる確率過程の生成作用素とアフィンヘッケ代数との関係を明らかにした。 この生成作用素は差分作用素で、デルタ関数型の斥力相互作用をもつ 1 次元ボゾン粒子系のハミルトニアンの離散化と見なせる。

以上の結果を拡張し、アフィンヘッケ代数の表現を用いて他の可積分確率過程を構成することを目的とする。さらに、構成した確率過程の生成作用素に対し、その固有関数を構成し、表現論や可積分系の研究で用いられる手法(量子逆散乱法など)との関係を明らかにする。

(2) 多重ゼータ値の q 類似について

研究代表者は以前の研究で、多重ゼータ値の q 類似を扱うための代数的枠組みを与えた。この結果をもとにして、多重ゼータ値の q 類似の代数的構造の解明と、形式的 KZ 方程式の q 差分化の構成を目指す。

３．研究の方法

(1) 可積分な確率過程について

以前の研究で O'Connell-Yor モデルの生成作用素とアフィンヘッケ代数との関係を明かにした。この研究では、アフィンヘッケ代数の１パラメータ変形と見なせる代数の表現から、O'Connell-Yor モデルの生成作用素を拡張した差分作用素が得られた。そこで本研究では、上と同様の議論が展開できるような範囲でアフィンヘッケ代数にどの程度のパラメータを入れられるかを考察し、結果として得られる代数の表現を考えることで、他の可積分確率過程が得られるかどうかを調べた。また、O'Connell-Yor モデルの構成に用いられる表現は、アフィンヘッケ代数の部分代数であるヘッケ代数(対称群の群環の 1 パラメータ変形)の自明な表現から自然に誘導されるものである。そこで、自明でない表現から誘導されるものを考えた場合に、どのような可積分確率過程が得られるのか、そして、その確率過程の生成作用素の固有関数はどのような表示をもつのかについて考察した。

(2) 多重ゼータ値の q 類似について

多重ゼータ値は多重ポリログ関数(対数関数の拡張)の特殊値である。形式的 KZ 方程式は、多重ポリログ関数を係数とする母関数(非可換変数の形式的ベキ級数)が満たす微分方程式で、そのモノドロミーの性質から多重ゼータ値の線形関係式が得られる。この事実を、以前の研究で構成した代数的な枠組みを用いて q 類似の場合に拡張する。

４．研究成果

(1) 可積分な確率過程について

① アフィンヘッケ代数の変形を用いた連続時間 q-Hahn 系の構成

以前の研究で、アフィンヘッケ代数にパラメータを入れて変形させた非可換代数の表現を用いて、O'Connell-Yor モデルの生成作

用素を拡張した差分作用素を構成した。この差分作用素は２つのパラメータを含むが、これらを特殊化すると、連続時間のマルコフ連鎖を定める生成作用素が得られることを発見した。そして、この生成作用素が定める確率過程は、笹本と和達によって定義された q-ボゾン系と呼ばれる可積分確率過程にほかならないことがわかった。

以上の観察を踏まえて、アフィンヘッケ代数にさらに多くのパラメータを入れて変形させた代数を考え、その表現を用いることにより、q-ボゾン系の拡張と見なされる可積分確率過程を構成した。結果として得られた確率過程は，Povolotsky が定義した q-Hahn 系と呼ばれる離散時間マルコフ連鎖の、連続時間極限となっている。q-Hahn 系の生成作用素の固有関数は、ベーテ仮設法と呼ばれる可積分系の手法を用いて既に構成されていたが、本研究で得られた代数的構成の枠組みのなかでは、固有関数が技術的な困難なく自然に得ることができ、その表現論的な意味も分かる。

② アフィンヘッケ代数の変形を用いた多種粒子 q-ボゾン系の構成

①で述べた研究成果により、q-ボゾン系の背後にある表現論的な構造が解明できた。我々が用いたアフィンヘッケ代数の変形は、その部分代数としてヘッケ代数を含むが、その自明な表現から誘導される(アフィンヘッケ代数の変形の)表現を使うと、q-ボゾン系が得られる。そこで、この自明な表現を、Schur-Weyl 双対性で扱われる有限次元表現のテンソル積に置き換えて、q-ボゾン系と同様の構成を行った。その結果として、q-ボゾン系の拡張と見なされる確率過程が得られた。笹本と和達が定義した q-ボゾン系は、一次元の格子上を一種類の粒子が動くモデルであるが、我々が得たのはこれを多種類の粒子が動くように拡張したもので、特別な場合として q-ボゾン系を含む。

③ 量子可積分系の解析手法による多種粒子 q-ボゾン系の固有関数の構成

②で述べたように、アフィンヘッケ代数の変形の表現を用いることにより、多種粒子 q-ボゾン系が構成できる。同時に、その生成作用素の固有関数も表現論的に構成できるのであるが、物理学的に興味のある量を取り出すには、さらに明示的な公式が必要である。そこで、固有関数を別の方法で構成することを試み、q-ボゾン代数と呼ばれる別の非可換代数を使って表す明示的な公式を得た。我々の明示公式は、量子可積分系の解析手法のひとつである量子逆散乱法で用いられる基本的な作用素を使って、その行列要素として表すもので、量子可積分系の理論ではよく現れる形をしている。

(2) 多重ゼータ値の q 類似について

当初、予定していた形式的 KZ 方程式の q 類似の構成については、具体的な成果が得られなかった。しかし、別の観点から多重ゼータ値の q 類似について考察し、以下の結果を得た。

近年、多重ゼータ値の数論的な種々の拡張・類似物についての研究が進んでいる。そのなかでも、有限多重ゼータ値と呼ばれる有限体の元と、対称多重ゼータ値と呼ばれる実数値に着目する。金子と Zagier は、しかるべき定式化の下で、有限多重ゼータ値を対称多重ゼータ値に移す(有理数体上の代数としての)同型が存在することを予想している。

研究代表者は、Henrik Bachmann 氏、田坂浩二氏との共同研究で、金子と Zagier による予想と、多重ゼータ値の q 類似の間に以下の関係があることを発見した。

多重ゼータ値の q 類似は多重無限和で、これが収束するためにはパラメータ q の絶対値が１未満でなければならない。しかし、和を取る範囲を有限に制限すると、パラメータ q を１のベキ根に特殊化できる。このようにして得られる有限和を、以下では１のベキ根における有限多重調和 q 級数と呼ぶ。

我々は、有限多重ゼータ値と対称多重ゼータ値)が、１のベキ根における有限多重調和 q 級数から同時に得られることを示した。以下、q は原始 n 乗根であるとする。n を素数とし(1-q)で生成されるイデアルを法として有限多重調和 q 級数を考えると、位数 n の有限体の元が得られるが、これが有限多重ゼータ値と一致する。一方で、n を大きくする極限を取ると、有限多重調和 q 級数はある複素数に収束し、極限値の実部が本質的に対称多重ゼータ値と一致する。

我々の結果は金子と Zagier による予想の解決に直ちにつながるものではないが、この予想の意味を q 類似の観点から与えるものだと言えるだろう。

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕（計 4 件）

① Yoshihiro Takeyama, On the eigenfunctions for the multi-species q-Boson system, to appear in Funkcialaj Ekvacioj, 査読有
② 竹山美宏、可積分確率過程に現れる対称関数、九州大学応用力学研究所 研究集会報告「非線形波動研究の深化と展開」、31-38、2017、査読有
③ Yoshihiro Takeyama, A deformation of affine Hecke algebra and integrable stochastic particle system, J. Phys. A 47(46), 2014, 査読有
DOI: 10.1088/1751-8113/47/46/465203
④ Yoshihiro Takeyama, A discrete analogue of periodic delta Bose gas and affine Hecke algebra, Funkcial. Ekvac. 57(1), 107-118, 2014, 査読有

DOI: 10.1619/fesi.57.107

〔学会発表〕（計 10 件）
① 竹山美宏、1 のベキ根をパラメータにもつ有限多重調和級数と有限(実)多重ゼータ値、関西多重ゼータ研究会、2017
② 竹山美宏、On the eigenfunctions for the multi-species q-Boson system、日本数学会年会、2017
③ 竹山美宏、可積分確率過程に現れる対称関数、非線形波動研究の深化と展開、2016
④ 竹山美宏、可積分確率過程の表現論的構成、Algebraic Lie Theory and Representation Theory、2016
⑤ 竹山美宏、Algebraic construction of multi-species q-Boson system、Infinite Analysis 16、2016
⑥ 竹山美宏、Algebraic construction of multi-species q-Boson system、日本数学会年会、2016
⑦ 竹山美宏、Algebraic construction of integrable stochastic particle systems、可積分系理論の諸分野への応用、2015
⑧ 竹山美宏、A deformation of affine Hecke algebra and integrable stochastic particle system、日本数学会年会、2015
⑨ 竹山美宏、Algebraic construction of integrable stochastic system、数学・物理における可積分性の諸相、2015
⑩ Yoshihiro Takeyama, A deformation of affine Hecke algebra and integrable stochastic particle system, From Macdonald Processes to Hecke Algebras and Quantum Integrable Systems, 2014

〔図書〕（計 0 件）

〔産業財産権〕

○出願状況（計 0 件）

○取得状況（計 0 件）

〔その他〕
なし

６．研究組織
(1)研究代表者
竹山 美宏（TAKEYAMA, Yoshihiro）
筑波大学・数理物質系・准教授
研究者番号：60375392

(2)研究分担者
なし

(3)連携研究者
名古屋 創（NAGOYA, Hajime）
金沢大学・数物科学系・准教授
研究者番号：80447367

田中立志（TANAKA, Tatsushi）
京都産業大学・理学部・准教授
研究者番号：60515196

(4)研究協力者
なし