様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ３０ 年　 ５ 月 ２８ 日現在

機関番号：１２５０１
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2014～2017
課題番号：２６４００１０７

研究課題名（和文）トロピカル代数曲線を用いた離散可積分系の解析

研究課題名（英文）Studies on discrete integrable systems via tropical algebraic curves

研究代表者
野邊　厚（Nobe, Atsushi）

千葉大学・教育学部・准教授

研究者番号：８０３９７７２８

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,700,000円

研究成果の概要（和文）：はじめに、A(2)2N型、C(1)N型、D(2)N型一般化戸田格子は、それぞれA(1)2N-1型、A(1)2N型、A(1)2N+1型戸田格子の部分力学系として実現できることを示し、それらのトロピカル化を行った。
次に、Hesseの3次曲線ペンシル上の線形自己同型群であるHessian群のトロピカル類似について考察し、トロピカルHesseペンシルの線形自己同型群として3次二面体群を得た。
さらに、階数2のクラスター代数から導かれる双有理写像力学系の幾何学的側面について詳しく調べ、その保存量を通して、クラスター代数の変異と楕円曲線のMordell-Weil群とを関連づけた。

研究成果の概要（英文）：First we considered Lie-algebraic generalizations of the Toda lattice. We realized the generalized Toda lattices of types A(2)2N, C(1)N and D(2)N as the sub-dynamical systems of the Toda lattices of types A(1)2N-1, A(1)2N, A(1)2N+1, respectively. We also obtained their tropical analogues.
Next we studied a tropical analogue of the Hessian group, which is the group of linear automorphisms acting on the Hesse pencil. We then obtained the dihedral group of degree 3 as the group of linear automorphisms acting on the tropical analogue of the Hesse pencil.
We moreover investigated the cluster algebras of rank 2 from the view point of discrete integrable systems. We gave the conserved quantities of the dynamical systems arising from the cluster algebras of types A1*A1, A2, B2, G2, A(1)1 and A(2)2. We also showed direct connections between the dynamical systems and the Mordell-Weil groups of the elliptic curves arising via the conserved quantities of the dynamical systems.

研究分野：大域解析学

キーワード：トロピカル幾何学　クラスター代数　戸田格子　QRT系　楕円曲線

１．研究開始当初の背景

（１）1990 年に高橋・薩摩によって発見された箱玉系は、`ソリトン'（玉の並び）が、一列に並んだ箱の中を進行するセルオートマトンである。この`ソリトン'の速度はその長さに比例するため、長さの異なる`ソリトン'どうしは衝突し相互作用する。衝突後、各`ソリトン'はもとの長さを取り戻し再び移動し始めるが、衝突の痕跡は位相のずれとして残る。このように箱玉系の`ソリトン'は偏微分方程式のソリトン解と同様に振る舞うが、実際、これら二つのソリトンの間には数学的に厳密な関係が存在する。すなわち、超離散化という極限操作を通して、ソリトン方程式およびそのソリトン解や保存量は箱玉系の発展方程式およびその`ソリトン'や保存量と結びつくのである。

（２）ソリトン方程式のもう一つの重要な解として、テータ函数を用いて記述できる準周期解が知られている。とくに周期的境界をもつソリトン方程式は、そのスペクトル曲線を通して、従属変数の初期値と周期行列との関係が与えられ、その初期値問題を解くことができる。このような初期値問題の幾何学的解法は箱玉系に対しても有効であり、周期的境界をもつ箱玉系のスペクトル曲線を通して、箱玉系の初期値と超離散テータ函数のパラメータとの関係が与えられ、その初期値問題を解くことができる。このように超離散化という極限操作にトロピカル幾何学的手法を組み合わせることで、究極の離散系である箱玉系の詳細な解析が可能になるという事実は非常に興味深い。

（３）箱玉系の解析手法としては、上で述べたトロピカル代数曲線を用いたものの他に、KKR 対応を用いた組合せ論的手法もよく研究されている。どちらの手法も、適切な実トーラス上で箱玉系の時間発展を線形化しその初期値問題を解くため、両者はこの実トーラスを通して対応付けられる。また、量子群のクリスタル基底と組合せ論的 R 行列を用いて箱玉系を再定義し、さまざまなアフィン Lie 代数から箱玉系を構成する研究も行われている。

（４）2002 年に Fomin-Zelevinsky により発見されたクラスター代数は初期クラスター変数に変異という操作を繰り返して起用して構成される有理函数体の部分環として定義されるが、とくに初期クラスター変数の正係数 Laurent 多項式環になるという著しい性質（Laurent 性・正値性）をもつことで知られる。クラスター代数の発見当初から、Somos 列などを通して離散可積分系との関係が指摘されており、実際、離散 KP 方程式の双線形形式と等価なクラスター代数の交換関係も発見されている。

２．研究の目的

（１）周期箱玉系などの離散可積分系は、トロピカル代数曲線をスペクトル曲線としてもつため、対応する実トーラス（Jacobi 多様体）においてそれらの時間発展は線形化され、超離散テータ函数を用いて初期値問題を厳密に解くことができる。本研究においては発想を逆転し、アフィン Lie 代数に付随する離散戸田格子のスペクトル曲線から構成した実トーラスにおける線形フローをいくつかのトロピカル代数曲線の交叉を用いて幾何学的に実現し、適切な座標のもとでその加法を書き下すことにより、新しい離散可積分系を構成する。

（２）さらに、このような枠組みにおいて得られる離散可積分系と量子群を用いた構成法により得られたものとを比較し、アフィン Lie 代数に基づいた離散可積分系の分類を行う。

（３）可積分系の幾何学的解法の鍵は、可積分系の時間発展が代数曲線の Jacobi 多様体上で線形化されることである。とくに離散可積分系においては、その離散的時間発展が Abel 多様体としての加法で表されることが本質的である。Abel 多様体で加法を具体的に扱うのは容易ではないが、代数曲線の Picard 群における加法を代わりに考えればその取り扱いは比較的易しく、代数曲線の交叉を用いてその加法を実現できる。本研究においては、このような考えをさらに推し進め、トロピカル代数曲線の Picard 群の加法からさまざまな離散可積分系の導出を試みる。とくに、アフィン Lie 代数を用いた離散戸田格子の拡張に着目し、それらに対応する代数曲線の Picard 群の加法を幾何学的に実現する。さらに、そのような枠組みをトロピカル幾何学で記述することにより、新しい離散可積分系の導出を目指す。

（４）クラスター代数はその性質（Laurent 性・正値性）から、離散可積分系およびトロピカル幾何学との強い結びつきが示唆される。とくに、階数 2 のクラスター代数は 2 次元離散可積分系とみることが可能であり、その保存量を通してトロピカル代数曲線とも関連づけられる。離散可積分系との関係を用いて、クラスター代数の幾何学的特徴を明らかにする。

３．研究の方法

（１）アフィン Lie 代数に付随する離散戸田格子の時間発展をそのスペクトル曲線の Picard 群における加法として記述し、いくつかの代数曲線の交叉を用いてそれらを実現する。それら代数曲線のトロピカル化によってアフィン Lie 代数に付随する実トーラス上の線形フローを導出し、その線形フローから離散可積分系を具体的に構成する。このような離散可積分系はその構成方法からアフィン Lie 代数的解釈が可能であるため、量子群から構成された箱玉系と比較検討し、アフィン Lie 代数を用いた離散可積分系の分類を行う。また、離散可積分系の保存量への Weyl 群作用と、加法の実現に必要な代数曲線との

関係を明らかにする。さらに、同様の手法を用いて、有限体上定義された代数曲線における Picard 群の加法から離散可積分系を導出することも目指す。

（２）クラスター代数はその交換行列を通して一般化 Cartan 行列もしくは Dynkin 図と結びつく。とくに、階数２の場合、この対応関係は一意的であり、一般化 Cartan 行列を用いてクラスター代数を分類できる。有限型およびアフィン型 Cartan 行列に対応するクラスター代数を２次元離散可積分系と見なし、楕円曲線の加法を用いて、その幾何学的特徴付けを行う。

４．研究成果

（１）A(2)2N 型、C(1)N 型、D(2)N 型 Lie 代数に対応する一般化戸田格子は、それぞれ A(1)2N-1 型、A(1)2N 型、A(1)2N+1 型 Lie 代数に対応する一般化戸田格子の部分力学系として実現できることを示した。A(1)M 型戸田格子はシステムサイズ M+1 の戸田格子に周期的境界条件を課したもの(周期戸田格子)に他ならないので、これらの一般化戸田格子が周期戸田格子の部分力学系として実現できることを示したことになる。また、このような性質は離散化の際にも保持され、A(2)2N 型、C(1)N 型、D(2)N 型 Lie 代数に対応する離散一般化戸田格子が、同様に、それぞれ A(1)2N-1 型、A(1)2N 型、A(1)2N+1 型 Lie 代数に対応する離散一般化戸田格子(周期離散戸田格子)の部分力学系として実現できる。とくに twisted なアフィン Lie 代数(A(2)2N 型、D(2)N 型)に対応する離散戸田格子に対してこのような報告はこれまでになされていないようである。これらの離散一般化戸田格子が周期離散戸田格子の部分力学系となるための条件は系の従属変数に対する subtraction-free な有理式で与えられる。同様に、周期離散戸田格子の時間発展そのものも従属変数の subtraction-free な有理式で与えられるため、これらの離散一般化戸田格子に対して超離散化の手法を適用することが可能である。離散一般化戸田格子に超離散化を適用し、A(2)2N 型、C(1)N 型、D(2)N 型 Lie 代数に対応する超離散一般化戸田格子を得た。周期離散戸田格子の超離散化としては周期箱玉系がよく知られており、トロピカル Jacobi 多様体上での線形化、互いに素条件を用いた可積分性の判定などについて調べられている。本研究で得られた超離散一般化戸田格子は周期箱玉系と同様の振る舞いを示す力学系であり、その解の挙動の詳細な解析は今後の課題である。

（２）超離散一般化戸田格子は、アフィン Lie 代数に付随する離散一般化戸田格子に超離散化を適用して構成される。また、トロピカル代数曲線をそのスペクトル曲線にもつ離散力学系でもある。一方、有理函数体の生成元(クラスター変数)に変異とよばれる操作を繰り返し適用して生成されるクラスター代数は、変異を定める反対称化可能行列(交換行列)と Cartan 行列との対応関係を通して Lie 代数と結びつき、クラスター変数の有限性と Lie 代数の有限次元性が等価であることが知られている。クラスター変数の変異を離散力学系の時間発展と見なすと、そのような離散力学系はクラスター代数に付随する Lie 代数と関係づけられる。これらの事実を踏まえると、Lie 代数を介した、離散一般化戸田格子とクラスター代数との対応関係が強く示唆される。本研究においては、離散一般化戸田格子の時間発展とクラスター代数の変異との関係について考察し、とくに A(1)1 型 Lie 代数に対応するものに対して、その直接的対応関係を明らかにした。A(1)1 型離散戸田格子はその時間発展をスペクトル曲線(楕円曲線)上の加法として実現できるため、楕円曲線の加法の定める力学系の一般的形式である QRT 系として表すことができる。同様に、A(1)1 型クラスター代数の変異も QRT 系として実現できることを示し、適当な双有理変換および適切な初期条件の設定により、これら二つの QRT 系を直接的に関係づけ、A(1)1 型離散戸田格子と A(1)1 型クラスター代数との対応関係を示した。この対応関係を用いると、クラスター変数を離散戸田格子の特解を用いて表現することができる。また、離散戸田格子を通して、A(1)1 型クラスター代数の変異を楕円曲線の加法を用いて実現することかもできる。こうして、A(1)1 型クラスター代数の幾何学的特徴付けを与えることができた。すなわち、A(1)1 型クラスター代数の変異は種数 1 のコンパクト Riemann 面(楕円曲線)上の加法の退化極限としての、種数 0 のコンパクト Riemann 面(射影直線)上の双有理変換であることを示した。ここで、離散戸田格子の初期値が楕円曲線の退化極限に関するパラメータに相当する。

（３）Hesse の 3 次曲線ペンシル上の線形自己同型群である Hessian 群のトロピカル類似について考察した。Hessian 群は Hesse の 3 次曲線の変曲点(Hesse ペンシルの base point)の自己同型群と標数 3 の有限体上の 2 次特殊線形群との半直積として表されるが、トロピカル化によって、ペンシルのパラメータへの作用は退化し、トロピカル Hesse 曲線上の群作用のみ生き残ることを示した。その結果、トロピカル Hesse ペンシルの線形自己同型群として 3 次二面体群を得た。

（４）階数 2 のクラスター代数は、交換行列と対応する一般化 Cartan 行列(もしくは Dynkin 図)を用いて、有限型、アフィン型および不定型に分類される。有限型は有限周期をもつため、対応する Laurent 多項式環の構造から容易に保存量を構成することができる。とくに、A1×A1、A2、B2 型の場合、この保存量から構成される不変曲線は楕円曲線となり、対応する離散可積分系は QRT 系であることが分かる。一方、G2 型の場合、得られる不変曲線は特異 4 次曲線であるため、直接

QRT 系と関係づけられるわけではない。本研究においては、射影平面のブローアップを用いてこの特異曲線の特異点解消を行い、楕円曲線を構成した。さらに、クラスター代数の変異と共役なこの楕円曲線上の離散可積分系を導出し、その幾何学的意味づけを行った。すなわち、このような離散可積分系は、楕円曲線上の Mordell-Weil 群の振れ部分群の生成元によって与えられることを示した。この振れ部分群は位数４の群であり、G2型クラスター代数が周期８をもつことと対応する。また、アフィン型(A(1)1、A(2)2)についても同様の考察を行い、特異４次曲線で与えられる不変曲線の特異点解消を通して、それぞれの型に対応する円錐曲線上の離散可積分系を構成した。これらの離散可積分系はそれぞれ A(1)1 型離散戸田格子の時間発展および Backlund 変換の特異極限であることを示した。アフィン型の場合、無限周期をもつため、有限型と同様の代数学的手法では不変曲線を構成できないが、本研究ではトロピカル代数曲線上の区分線形写像力学系を経由することでその困難を解決した。さらに、離散可積分系としての一般解を用いて、クラスター代数の一般項を構成した。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 10 件）
① Atsushi Nobe, Birational maps conjugate to the rank 2 cluster mutations of affine types and their geometry, arXiv:1801.10320, 査読無, 2018
② 野邊　厚、ランク２ミューテーションの不変曲線について、応用力学研究所研究集会報告、査読有、 印刷中、2018
③ 野邊　厚、クラスター代数とセルオートマトン、数理解析研究所講究録、査読無、印刷中、2018
④ 野邊　厚、$A^{(1)}_1$型クラスター代数の変異と離散戸田格子、応用力学研究所研究集会報告、査読有、**28AO-S6**、 2017、pp 25-30
⑤ Atsushi Nobe, Group actions on the tropical Hesse pencil, Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics, 査読有, **33**, 2016, pp 537-556
⑥ Atsushi Nobe, Mutations of the cluster algebra of type $A^{(1)}_1$ and the periodic discrete Toda lattice, Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, 査読有, **49**, 2016, 285201
⑦ Masataka Kanki, Jun Mada, Tetsuji Tokihiro, Integrability criterion in terms of coprime property for the discrete Toda equation, Journal of Mathematical Physics, 査読有, **56**, 2015, 22706
⑧ 野邊厚、 一般化戸田格子の超離散化、応用力学研究所研究集会報告、査読有、**26AO-S2**、2015、pp 1-7
⑨ Atsushi Nobe, A geometric realization of the ultradiscrete periodic Toda lattice via tropical plane curves, RIMS Kokyuroku Bessatsu, 査読有, **B47**, 2014, pp 55-76
⑩ Masataka Kanki, Jun Mada, Takafumi Mase, Tetsuji Tokihiro, Irreducibility and co-primeness as an integrability criterion for discrete equations, Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, 査読有, **47**, 2014, 465204

〔学会発表〕（計２０件）
① 野邊　厚、ランク２ミューテーションの不変曲線について、研究集会「非線形波動研究の新潮流 -- 理論とその応用 -- 」、2017
② Atsushi Nobe, Mutations of cluster algebras and discrete integrable systems, The Tenth IMACS International Conference on Nonlinear Evolution Equations and Wave Phenomena: Computation and Theory, 2017
③ Atsushi Nobe, Tropical elliptic curves and discrete integrable systems, Workshop on Tropical geometry - basic and applications, 2017
④ 間田　潤、血管新生の数理モデル、研究集会「数理科学の拡がり：可積分系・数理医学」、2017
⑤ 野邊　厚、$A^{(2)}_2$型マトリックスミューテーションの幾何学、日本応用数理学会 2017 年度年会、2017
⑥ 野邊　厚、$A^{(1)}_1$型クラスター代数の変異と離散戸田格子、研究集会「非線形波動研究の深化と展開」、2016
⑦ 野邊　厚、$A^{(1)}_1$型クラスター代数の変異と離散戸田格子、日本数学会 2016 年度秋季総合分科会、2016
⑧ 野邊　厚、間田　潤、クラスター代数とセルオートマトン、日本応用数理学会 2016 年度年会、2016
⑨ 野邊　厚、クラスター代数とセルオートマトン、RIMS 研究集会「可積分系数理の現状と展望」、2016
⑩ 野邊　厚、間田　潤、クラスター代数と QRT 系、第 12 回 日本応用数理学会 研究部会連合発表会、2016
⑪ Atsushi Nobe, Ultradiscretization of generalized Toda lattices, Workshop on Integrable and nonintegrable lattice models: theory and computation, 2016
⑫ 野邊　厚、戸田格子とクラスター代数、数学教室談話会、東京理科大学理工学部

2015
⑬ 野邊　厚、戸田格子とクラスター代数、2015 年度 応用数学合同研究集会、2015
⑭ 野邊　厚、Toda lattice, QRT maps, and cluster algebras、 MIMS 共同研究集会「可積分系が拓く現象数理モデル」、2015
⑮ 野邊　厚、離散戸田格子と QRT 系、日本応用数理学会 2015 年度年会、2015
⑯ 野邊　厚、周期戸田格子を用いて実現可能な一般化戸田格子について、第 11 回 日本応用数理学会 研究部会連合発表会、2015
⑰ 神吉 雅崇、時弘 哲治、間田 潤、周期離散戸田方程式における互いに素条件、第 11 回 日本応用数理学会 研究部会連合発表会、2015
⑱ 野邊　厚、一般化戸田格子の超離散化、研究集会「非線形波動研究の現状−課題と展望を探る−」、2014
⑲ 神吉 雅崇、時弘 哲治、間瀬 崇史、間田 潤、互いに素条件による離散方 程式の可積分性判定、2014 年度日本数学会秋季総合分科会、2014
⑳ 野邊　厚、$C^{(1)}_N$型超離散戸田格子と戸田型セルオートマトン、日本応用数理学会 2014 年度年会、2014

［その他］
ホームページ等
https://www.researchgate.net/profile/Atsushi_Nobe

６．研究組織
(1)研究代表者
野邊　厚（NOBE Atsushi）
千葉大学・教育学部・准教授
研究者番号：80397728

(2)研究分担者
間田　潤（MADA Jun）
日本大学・生産工学部・准教授
研究者番号：80396853