

平成 30 年 5 月 8 日現在

機関番号：12501

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2014～2017

課題番号：26400108

研究課題名(和文)作用素環と力学系の多角的研究

研究課題名(英文)Study of operator algebras and dynamical systems from various perspectives

研究代表者

松井 宏樹(Matui, Hiroki)

千葉大学・大学院理学研究院・教授

研究者番号：40345012

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,700,000円

研究成果の概要(和文)：作用素環と力学系について多角的な研究を行った。とりわけ、単純核型 C^* 環への群作用の分類と、カントール集合上の極小力学系の解析について、重点的に取り組んだ。具体的には、Kirchberg環へのpoly-Z群の外部的作用をコサイクル共役で分類した。また、有限型サブシフトの有限個の積から生じるエタール亜群を分類し、エタール亜群のホモロジー群や付随する位相充足群のアーベル化を決定した。

研究成果の概要(英文)：I studied operator algebras and dynamical systems from various perspectives. In particular, I focused on classification of group actions on simple nuclear C^* -algebras and analysis of minimal dynamical systems on Cantor sets. For instance, I obtained a complete classification of outer actions of poly-Z-groups on Kirchberg algebras up to cocycle conjugacy. Secondly, I classified étale groupoids arising from finite products of shifts of finite type, and computed the homology groups of the étale groupoids and the abelianizations of the associated topological full groups.

研究分野：作用素環論

キーワード：作用素環 極小力学系

1. 研究開始当初の背景

作用素環への群作用の解析や作用素環と力学系との相互作用の研究は、作用素環論が創始された当初から現在に至るまで、中心的な課題であり続けている。作用素環は von Neumann 環と C^* 環に大別される。可測空間の非可換化である von Neumann 環の場合には、Fields 賞を受賞した A. Connes による業績などによって、従順な群作用の分類やエルゴード論との密接な関わりなど、既に多くの重要な成果が得られている。しかし、位相空間の非可換化である C^* 環の場合には様々な技術的困難が発生し、包括的な研究を妨げている。

C^* 環と群作用に関して研究開始当初までに得られていた重要な成果としては、AT 環や Kirchberg 環上の自己同型の研究(岸本晶孝・中村英樹)・単純な C^* 環への有限群作用の研究(泉正己)・コントロール集合上の極小同値関係の軌道同型による分類(T. Giordano・松井宏樹・I. F. Putnam・C. F. Skau)・AF 環や Kirchberg 環や Jiang-Su 環への Z^2 作用の分類(泉正己・勝良健史・松井宏樹・佐藤康彦)などがあげられる。

2. 研究の目的

(1) 単純な C^* 環への群作用をコサイクル共役で出来るだけたくさん分類することを目指す。von Neumann 環の場合には、超有限因子環への従順離散群の作用の分類が既に完成している。しかし C^* 環の場合には、K 理論的障害を含む様々な困難が発生するため、全ての従順群を統一的に扱うことは(少なくとも現時点での技術では)難しい。そのため当該研究では考察の対象を poly- Z 群(各剰余群が整数群 Z となる正規列を持つ群)に限定する。

(2) コントロール集合への離散群の極小作用や、コントロール集合上の極小同値関係を、多角的に研究する。一つの目的は、極小同値関係を軌道同型で分類することである。さらに、軌道同型による分類と、同値関係から生じる C^* 環の分類との、相互関係についても明らかにしたい。もう一つの目的として、コントロール集合上の同値関係から生じる位相充足群の研究がある。この種の群の同型類を調べたり、群の解析的・幾何的・代数的な性質を研究する。

3. 研究の方法

(1) 単純 C^* 環への群作用の分類に関しては、標的とする C^* 環を適切に限定したうえで、その C^* 環の特性に見合った方向性を定めなければならない。まず、Kirchberg 環と呼ばれる C^* 環のクラスを研究の対象とする。このクラスの環は、Kirchberg-Phillips の理論により、KK 理論によって分類されることが既に分かっている。また、Kirchberg 環へ

のある種の Z^2 作用の分類が

M. Izumi and H. Matui,
 Z^2 -actions on Kirchberg algebras,
 Adv. Math. 224 (2010), 355-400.

によって既に得られている。この論文においては、作用の Rohlin 性の重要性とともに、作用の approximate representability (および asymptotic representability) という性質の重要性が明らかにされた。その後の研究では Cuntz 環 O_2 や O_∞ への poly- Z 群の作用の一意性を得た。また、Kirchberg 環への poly- Z 群の外部的な作用は、必ず O_∞ への外部的な作用を吸収することも示した。これらの成果を足掛かりとして、Kirchberg 環への poly- Z 群の作用の分類を完成させる。さらに余力があれば、UHF 環や Jiang-Su 環への群作用の分類へと研究を拡張する。

(2) コントロール集合への群作用やコントロール集合上の同値関係を統一的に扱う枠組みとして、groupoid の概念が有効である。特にこの設定では、適切な位相が入った étale groupoid と呼ばれる対象を扱うのが妥当である。2 つの同値関係が連続軌道同型であることと、対応する étale groupoid が同型であることが、同値である。また、étale groupoid に付随する位相充足群を自然に定義することが出来る。étale groupoid の位相充足群やホモロジーについては

H. Matui,
 Homology and topological full groups of étale groupoids on totally disconnected spaces,
 Proc. London Math. Soc. 104 (2012), 27-56.

という先行研究があり、これを足掛かりとする。また、

H. Matui,
 Topological full groups of one-sided shifts of finite type,
 J. Reine Angew. Math. 705 (2015), 35-84.

における有限型サブシフトから生じる位相充足群の研究を、一般化することを一つの目標とする。有限型サブシフトの連続軌道同型による分類は

K. Matsumoto, H. Matui,
 Continuous orbit equivalence of topological Markov shifts and Cuntz-Krieger algebras,
 Kyoto J. Math. 54 (2014), 863-877.

得られているが、これについても拡張の可能性を吟味する。

4. 研究成果

(1) 単純 C^* 環への群作用の分類に関しては、泉正己(京都大学)との共同研究が継続しており、その推進に努めた。Kirchberg 環

への任意の poly-Z 群の外部的な作用をサイクル共役で分類することが最終目標である。Hirsch length が 3 以下の poly-Z 群に対しては、群コホモロジーに値を取る obstruction class を具体的かつ直接的に調べることにより、分類ができる。この成果をまとめて、2016 年 8 月に東北大学で行われた国際会議 MSJ-SI “Operator Algebras and Mathematical Physics”において、講演発表を行った。Hirsch length が 4 以上の場合については、obstruction class を直接的に扱おうとしても Hirsch length に関する帰納法がうまく働かない。そこで、群の分類空間上の主束を用いて、問題を言い換え、代数トポロジー的な議論を経由する方針をとった。C*環の自己同型群とユニタリー群のあいだの弱ホモトピー同値(のようなもの)を用いて両者を行き来するという複雑な証明であるため、かなり時間がかかったが、正しい証明にたどり着くことができた。今後、議論を整理して、論文をまとめる作業に入る予定である。

(2) 有限型サブシフトから生じる位相充足群については、松本健吾(上越教育大学)との共同研究を進めた。論文[1]において、このような群が、単位閉区間上のある種の PL 写像のなす群として実現されることを示した。さらに論文[2]において、二つの有限型サブシフトが連続軌道同型であれば、同じ dynamical zeta function を持つことも示した。有限型サブシフトの拡張として、有限型サブシフトの有限個の直積を論文[4]で研究した。これは C*環の言葉でいえば、対応する Cuntz-Krieger 環のテンソル積に相当する。具体的な成果としては、groupoid のホモロジー群に関して Künneth formula が成立することを示し、これを適用することによって、有限型サブシフトの有限個の直積の場合のホモロジー群を計算した。系として、groupoid のホモロジー群と C*環の K 群とが一致することが分かった(HK 予想)。さらに、このクラスの groupoid がいつ互いに同型となるのかを、完全に決定した。これは対応する位相充足群の群同型による分類を与えたことにもなっている。また、このクラスの位相充足群のアーベル化を完全に決定することにも成功した。交換子群が単純になることは一般論から既に分かっているので、全ての正規部分群を決定できたことになる。位相充足群のアーベル化と groupoid のホモロジー群との間に関連性があることを主張する AH 予想が、このケースで成立していることも分かった。etale groupoid と位相充足群に関するサーベイ論文[3]において、現時点で知られていることや未解決問題などを整理した。

5 . 主な発表論文等
(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 11 件)

[1] K. Matsumoto, H. Matui,
Full groups of Cuntz-Krieger algebras and Higman-Thompson groups,
Groups, Geom. and Dyn. 11 (2017),
499-531.
doi: 10.4171/GGD/405
査読有

[2] K. Matsumoto, H. Matui,
Continuous orbit equivalence of topological Markov shifts and dynamical zeta functions,
Ergodic Theory Dynam. Systems 36 (2016),
1557-1581.
doi: 10.1017/etds.2014.128
査読有

[3] H. Matui,
Topological full groups of etale groupoids,
Operator Algebras and Applications: The Abel Symposium 2015, 197-224, Abel Symp., 12, Springer, Berlin, 2016.
査読有

[4] H. Matui,
Etale groupoids arising from products of shifts of finite type,
Adv. Math. 303 (2016), 502-548.
<https://doi.org/10.1016/j.aim.2016.08.023>
査読有

[5] S. Barlak, D. Enders, H. Matui, G. Szabo, W. Winter,
The Rokhlin property vs. Rokhlin dimension 1 on unital Kirchberg algebras,
J. Noncommut. Geom. 9 (2015),
1383-1393.
査読有

[6] H. Matui, M. Rørdam,
Universal properties of group actions on locally compact spaces,
J. Funct. Anal. 268 (2015), 3601-3648.
doi:10.1016/j.jfa.2015.01.022
査読有

[7] H. Matui,
Topological full groups of one-sided shifts of finite type,
J. Reine Angew. Math. 705 (2015), 35-84.
doi 10.1515/crelle-2013-0041
査読有

[8] H. Matui, Y. Sato,
Z-stability of crossed products by strongly
outer actions II,
Amer. J. Math. 136 (2014), 1441--1497.
査読有

[9] H. Matui, Y. Sato,
Decomposition rank of UHF-absorbing
C*-algebras,
Duke Math. J. 163 (2014), 2687--2708.
査読有

[10] K. Matsumoto, H. Matui,
Topological full groups of C*-algebras
arising from beta-expansions,
J. Aust. Math. Soc. 97 (2014), 257--287.
査読有

[11] K. Matsumoto, H. Matui,
Continuous orbit equivalence of topological
Markov shifts and Cuntz-Krieger algebras,
Kyoto J. Math. 54 (2014), 863--877.
査読有

〔学会発表〕(計4件)

[1] H. Matui,
Topological full groups and C*-algebras,
International Conference for the 70th
Anniversary of Korean Mathematical
Society,
2016年10月22日
ソウル国立大学(韓国)

[2] H. Matui,
Poly-Z group actions on Kirchberg
algebras,
MSJ-SI "Operator Algebras and
Mathematical Physics",
2016年8月2日~5日
東北大学(宮城県仙台市)

[3] 松井宏樹,
Topological full groups of etale groupoids,
エルゴード理論と群論に関連した作用素環
論における諸問題の研究,
2016年1月26・27日
京都大学数理解析研究所(京都府京都市)

[4] H. Matui,
Various examples of topological gull
groups,
Growth, Symbolic Dynamics and
Combinatorics of Words in Groups,
2015年6月1日
École normale supérieure(フランス)

〔図書〕(計0件)

〔産業財産権〕

出願状況(計0件)
取得状況(計0件)

〔その他〕
ホームページ等

6. 研究組織

(1) 研究代表者
松井 宏樹 (MATUI HIROKI)
千葉大学・大学院理学研究院・教授
研究者番号: 40345012

(2) 研究分担者
なし

(3) 連携研究者
なし

(4) 研究協力者
なし