1版

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成　３１　年　　４　月　２６　日現在

機関番号：　１２６０１

研究種目：　基盤研究(C)（一般）

研究期間：　2014～2018

課題番号：　２６４００１０９

研究課題名（和文）離散可積分系から導かれるセルオートマトン系の研究

研究課題名（英文）Study on cellular automata derived from discrete integrable systems

研究代表者

時弘　哲治（Tokihiro, Tetsuji）

東京大学・大学院数理科学研究科・教授

研究者番号：１０１６３９６６

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,700,000円

研究成果の概要（和文）：２階の離散有理写像に適用され，離散パンルベ方程式の構成に用いられた特異点閉じ込めテストを，co-primeness条件として再定式化し，代表的な可積分系が，高次元の離散ソリトン方程式を含めてこの条件を満たすことを示し，Hietarinta-Viallet方程式のような特異点閉じ込めテストは通過するが，可積分ではないものを，新たに準可積分系と名付け，Hietarinta-Viallet 方程式の高次元化，および離散戸田格子方程式の準可積分化とその高次元化を行った．また，準可積分系の簡約で得られる１次元系のLaurent性を示し，代数的エントロピーを厳密に求めるなど，数理的な構造を明確にした．

研究成果の学術的意義や社会的意義
特異点閉じ込めは，坂井によって，特異点解消による双有理写像の構成として幾何学的に説明された．本研究は，この特異点閉じ込めを代数的に再定式化したものであり，学術的な意義は大きい．実際に，この定式化によって，新たに離散準可積分系と呼ばれるよい数理構造をもつ力学系のクラスを定式化でき，多くのよい数学的性質を持ちながら可積分ではない系を特徴づけることができた．今後は，この離散準可積分系の分類問題に取り組まなければならないが，そのための数学的な準備や手法の開発は，当該数理科学分野において大きな意味を持つと思われる．

研究成果の概要（英文）：We reformulated the singularity confinement property as the co-primeness property of the discrete mappings. Typical discrete integrable systems including higher dimensional discrete soliton equations are proved to satisfy this co-primeness property. We proposed the notion of the discrete quasi-integrable equation which has the co-primeness property but is not integrable such as the Hietarinta-Viallet equation. Higher dimensional analogue of the Hietarinta-Viallet equation and quasi-integrable analogue of the discrete Toda lattice equation and its hegher dimensional extensions were constructed. We also investigated their mathematical structure by showing the Laurent property of the lower dimensional equations reduced from the quasi-integrable quations and by rigorously estimating their algebraic entropy.

研究分野：　可積分系

キーワード：　準可積分系　co-primeness条件　特異点閉じ込め　Laurent性　代数的エントロピー　超離散

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９、ＣＫ－１９（共通）

１．研究開始当初の背景

セルオートマトン(Cellular Automaton, CA)は，有限通りの状態をとるセルの集合からなり，時間，空間，各点での状態がすべて離散的な力学系である．1970 年代前半に流行した Conway による Game of Life が典型的な CA の例である．簡単な時間発展規則から複雑なパターンを生成できるため，多くの複雑な自然・社会現象のモデルとして研究されている．CA は，その離散性により，数値的なシミュレーションに向いているが，逆に解析的な手法が使いにくいため，大域的な性質を厳密に論じることは一般には困難である．これに対して，1996 年に研究代表者らは，連続的な方程式から超離散化と呼ばれる極限操作によって CA を構成すれば，多くの解析的な手法を適用でき，大域的な性質も論じることができることを示した．この CA 系は超離散系と呼ばれ，特に，ソリトン方程式やパンルヴェ方程式などの非線形可積分方程式系を超離散化した超離散可積分系は，もとの方程式のソリトン解や準周期解と類似の時間発展パターンを生成し，可積分力学系として十分多くの保存量を持ち，初期値問題を解くことができるなど豊富な数理構造を持つことが示されてきた．2001 年には，超離散可積分系は可解格子模型の絶対零度極限から得られることが示され，クリスタル理論による分類，一般化，初期値問題の解法などが展開され，その後，2007 年頃から，トロピカル幾何学におけるトロピカル化と超離散化の等価性を用いて，超離散系の幾何学的な構造の研究が進んできた．現在でも，超離散化における正値性条件の拘束を外したパリティ付超離散化，量子系の相関函数の超離散極限である超離散相関函数，グラフ理論を用いた厳密解の構成など，多くのテーマで超離散系の研究が続いており,国内海外を問わず,超離散系をトピックとする研究集会も頻繁に開かれていた．このように，超離散化によって離散可積分系から豊富な数理構造を持つ CA 系（可積分 CA 系）が構成され，その研究が進んできたが，研究開始当初，研究代表者らは，新たに，離散可積分系を直接有限体上で定義することにより，可積分 CA 系を構成する手法を見出した．これは，p 進数体上で定義した離散可積分系を還元 (reduction) によって有限体に制限する手法である．この手法によって，有限体上で矛盾なく離散パンルヴェ方程式を定式化できることを示し，可積分系判定のひとつの criterion である特異値閉じ込めテストを数論的に拡張した AGR (almost good reduction) という概念を提案した．また，この手法をソリトン方程式系に拡張する試みも行い,係数体を有限体上の 1 parameter 有理関数体とするとある程度満足のゆく結果が得られることが分かってきた．しかしながら，AGR などの概念を有限体上のソリトン系に拡張するには，いくつかの困難が存在する．１つは，ソリトン方程式系，一般には偏差分方程式系，では特異値閉じ込めの明確な概念が確立していないことである．特異値閉じ込めテストの提案直後に Ramani-Grammaticos-Satsuma によって，離散 KP 方程式の双線形形式では解の零点が閉じ込められることが議論されたが，一般の非線形方程式については議論がなく，数学的にも 曖昧なままになっていた．2 つめは，ソリトン方程式系ではパンルヴェ系と異なり初期値空間の理論（岡本-坂井理論）が存在しないため，双有理写像という形での一般化が困難なことである．そのため，何らかの意味で特異点閉じ込めを高次元系に拡張することが重要な課題であった．

２．研究の目的

本研究の目的は，離散可積分系から，超離散化や有限体への還元によって導出される可積分セルオートマトンの数理構造を解明し，また，クラスター代数の持つ Laurent 性が多くの可積分写像にあらわれることから，Laurent 性と可積分性の関係を明らかにし，離散可積分系研究に新たな進展を与えることである．具体的に解明すべき対象は， p 進数体からの還元のもつ AGR(almost good reduction)性，初期値に関する Laurent 既約性，p 進数体上のソリトン方程式とその還元，有限体上のソリトン方程式の厳密解および初期値問題の解決，超離散相関函数などである．
特に重要な目的として，2 階の有理写像における特異点閉じ込めの概念を高次元に拡張することがある.有限体上の離散可積分方程式は自然に可積分セルオートマトン系とみなされるので，良い性質を持つ数論的力学系の構成に加えて，渋滞現象や遺伝子発現などの生体モデルとしての応用の可能性を探ることも目的の一つである．

３．研究の方法

(1) パンルヴェ方程式系の AGR 性の証明と(2)ソリトン方程式系の特異値閉じ込めの概念の数学的定式化，AGR 性の確立，の 2 点を中心に研究を進め，有限体上の可積分系に付随する諸問題（特殊解の構成，初期値問題の解法，有限体上の可積分系の Lax 形式の確立，など）に順次取り組む予定であったが，ソリトン方程式系における特異値閉じ込めの概念の一般化が，<u>解を初期値に関する有理関数</u>と見ることによって進展したため，この性質を持つ離散系の数理構造を解明することを主眼とした．この性質（co-primeness 性と呼ぶ）をもつ高次元離散格子方程式を，双線形方程式を拡張した多項式型方程式を用いて，対応するτ函数を構成し，まず，その初期値に対する既約性を証明し，越えｒを利用して基の非線形方程式の co-primeness 性を証明する．さらに，簡約で得られる系に対して代数的エントロピーを定める．そのため，クラスター代数を応用し，Laurent 性と既約性に注目した．また，離散系に関するネヴァリンナ

理論やグラフ理論の適用も試みた.

４．研究成果

(1)2 階の離散有理写像に適用され, 離散パンルベ方程式の構成に用いられた特異点閉じ込めテストを, co-primeness 条件として再定式化した．Co-primeness 条件とは, 系が時間発展によってとり得る値を, 初期値の有理関数と見たとき，時空間的にある一定の距離はなれた点では, その有理関数は互いに素になるという条件である．QRT 写像や離散パンルベ方程式などの 2 階の可積分有理写像ばかりでなく，代表的な離散可積分系である離散 KdV 方程式, 離散戸田格子方程式は, 周期境界条件, ディリクレ境界条件, 無限系での適切な境界条件などの様々な境界条件において co-primeness 条件を満たすことを示した.
(2)Hietarinta-Viallet 方程式のような特異点閉じ込めテストは通過するが可積分ではないものを, 新たに準可積分系と名付け, Hietarinta-Viallet 方程式の高次元化, および離散戸田格子方程式の準可積分化と任意の次元の高次元化を行った．これらの方程式は, 可積分系における双線形形式の拡張である多項式形式を満たし，そのτ函数類似は, 初期値に対する Laurent 性を満たし，因子分解できない場合には初期値の有理関数として既約性を満たすことを証明した．この既約性を用いて，co-primeness 性を証明した.
(3)準可積分系の簡約で得られる１次元系の Laurent 性を示し,代数的エントロピーを厳密に求めた．特に，Hietarinta-Viallet 方程式の高次元化から簡約で得られる拡張型の Hietarinta-Viallet 方程式, およびその高階化方程式系に対して, 代数的エントロピーを厳密に計算することに成功した. 特に拡張型 Hietarinta-Viallet 方程式では, そのべき指数が偶数の場合のみ準可積分系になることを証明した．一方で，準可積分である場合はもとより，そうでない場合でも代数的エントロピーが厳密に定まることを示した.
(4)周期離散戸田格子方程式を有限体上で定義しうる条件を定め,頂点を可能な時間発展状態と対応させることによって，解の族を有限グラフによって表現した．この有限グラフを初期条件の巡回置換によって同値類に分類し，グラフが両方向グラフであることと完全グラフであることを証明した.
(5) いわゆる線形化可能系の２次元への拡張を考察した．特に，Somos 漸化式に類似の線形化可能系である Heideman-Hogan 漸化式から出発しその２次元拡張を導いた．この２次元系は各軸の２方向に線形化可能であり,その簡約によって Heideman-Hogan 系を含む線形化可能系の族が得られる．また, Dana-Scott 漸化式に関連する高階の２次元線形化可能格子系の属を構成した.
(6) 方程式が多項式のいくつかの因子に分解可能であるケースについて，一次元および二次元離散方程式の co-primeness 性（有理式として互いに素である性質）を調べた．いくつかの初等的方程式についての考察を行った後，Somos-4 方程式と（1 次元）離散 Toda 方程式の高次元拡張に焦点を当てた．以前の結果では，方程式の右辺が因数分解できない場合，すべての方程式が既約性と co-primeness 性を満たす事を証明したが，既約性はもはや満足されないケースについて, 右辺が因数分解可能であっても, これらの方程式に関しては co-primeness 性が依然として成り立つことを証明した.
(7) ある種の遺伝子発現が連立離散 KdV 方程式によって記述できることを示し，その厳密解を構成した.

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕（計　8 件）

① Ryo Kamiya, Masataka Kanki, Takafumi Mase, and Tetsuji Tokihiro, “Coprimeness-preserving non-integrable extension to the two-dimensional discrete Toda lattice equation”,Journal of Mathematical Physics 58, 012702 (2017); doi: http://dx.doi.org/10.1063/1.4973744
② Masataka Kanki, Takafumi Mase and Tetsuji Tokihiro, “Singularity confinement and chaos in two-dimensional discrete systems”, J. Phys. A: Math. Theor. 49 23LT01 (9pp) (2016). doi: 10.1088/1751-8113/49/23/23LT01
③ Masataka Kanki, Yuki Takahashi and Tetsuji Tokihiro, “Graphs emerging from the solutions to the periodic discrete Toda equation over finite fields'', Nonlinear Theory and Its Applications, IEICE Vol. 7 No. 3 pp. 338-353 (2016). doi: 10.1587/nolta.7.338
④ Masataka Kanki, Takafumi Mase and Tetsuji Tokihiro, “Algebraic entropy of an extended Hietarinta-Viallet equation'', J. Phys. A: Math. Theor. 48, 355202 (19pp) (2015). doi: 10.1088/1751-8113/48/35/355202
⑤ Masataka Kanki, Jun Mada and Tetsuji Tokihiro, “Integrability criterion in terms of coprime property for the discrete Toda equation'', J. Math. Phys. 56, 022706 (22pp) (2015). doi: 10.1063/1.4908109
⑥ A. S. Carstea and T. Tokihiro, “Coupled discrete KdV equations and modular genetic

networks'', J. Phys. A: Math. Theor. **48**, 055205 (12pages) (2015). doi:10.1088/1751-8113/48/5/055205
⑦ Masataka Kanki, Jun Mada, Takafumi Mase and Tetsuji Tokihiro, “Irreducibility and co-primeness as an integrability criterion for discrete equations'', J. Phys. A: Math. Theor. **47**, 465204 (15pp) (2014). doi:10.1088/175-8113/47/46/465204
⑧ Masataka Kanki, Jun Mada and Tetsuji Tokihiro, “Singularities of the discrete KdV equations and the Laurent property”, J. Phys. A: Math. Theor. \textbf{47} 065201 (12pages) (2014). doi:10.1088/1751-8113/47/6/065201

〔学会発表〕（計　３件）

① Tetsuji Tokihiro, “Co-primeness preserving extensions of discrete integrable equations”, The 12th AIMS Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications, Taipei (Taiwan), July 5 - 9 (2018).
② Tetsuji Tokihiro, “On quasi-integrable extension of 2D Toda equation”, The 3rd China-Japan Joint Workshop on Integrable Systems, Shaanxi Normal University, Xi’an (China), August 19-22 (2016).
③ Tetsuji Tokihiro, “Coprimeness as a quasi-integrability criterion for discrete equations”, Workshop "Topics on tropical geometry, integrable systems and positivity", Aoyama-gakuin University, Dec. 22-24 (2015).

６．研究組織

(2)研究協力者
研究協力者氏名：神吉　雅崇
ローマ字氏名：(KANKI Masataka)
研究協力者氏名：間瀬　崇史
ローマ字氏名：(MASE Takafumi)
研究協力者氏名：神谷　亮
ローマ字氏名：(KAMIYA Ryo)