

平成 29 年 6 月 2 日現在

機関番号：12605

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2014～2016

課題番号：26400111

研究課題名(和文)自由因子と微分方程式の研究

研究課題名(英文)Study on free divisors and differential equations

研究代表者

関口 次郎 (Sekiguchi, Jiro)

東京農工大学・工学(系)研究科(研究院)・教授

研究者番号：30117717

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,500,000円

研究成果の概要(和文)：B. Dubrovinによって導入されたフロベニウス多様体構造を拡張した概念である平坦構造の研究とその応用をした。フロベニウス多様体の定義ではポテンシャルの存在が重要であるが、それにあたる役割を果たすポテンシャル・ベクトル場を定義した。第一の応用は、well-generatedである既約複素鏡映群の商空間に平坦座標を導入したことである。第二の応用は、3次元の拡張されたWDVV方程式の解とパンルベVI方程式の解との対応を与えたことである。第三の応用は、パンルベVI方程式のかんりの代数関数解に対してポテンシャル・ベクトル場を計算したことである。

研究成果の概要(英文)：We introduce the notion of flat structure which is a generalization of Frobenius manifold defined by B. Dubrovin. Potentials play a basic role in the definition of Frobenius manifold. Potential vector fields play a similar role in the definition of the flat structures. We obtain the following three results as its application. The first one is to introduce the flat coordinate on the quotient space of the affine space under the action of the well-generated irreducible complex reflection group. The second one is to establish a correspondence between solutions of generalized WDVV equations of three variables to those of Painleve VI equation. The third one is to obtain the description of potential vector fields for algebraic solutions to Painleve VI equation.

研究分野：数物系科学

キーワード：自由因子 平坦構造 複素鏡映群 パンルベ方程式

1. 研究開始当初の背景

自由因子は、超曲面の孤立特異点の半普遍変形の研究の過程で斎藤恭司教授が定式化した概念である。自由因子を定義する多項式は実有限鏡映群の判別式の類似であり、興味深い幾何学的性質を持ち、超曲面の孤立特異点の研究の他に、超平面のアレンジメント、自由因子の補空間のトポロジーなどの研究で基本的な役割を果たしている。

本研究の研究代表者は20年以上前に $n=3$ の場合に、重みつき斉次多項式でいくつかの制約条件を満たしさらに自由因子を定義するものの分類を試みた。その結果を2009年の J. Math. Soc. Japan に発表した。この論文で求めた多項式の中には階数3の既約な実鏡映群の判別式も含まれている。また、平面曲線の E_6, E_7, E_8 型単純特異点と関係することが観察された。このことは自由因子と平面曲線の特異点とが関係することを示唆している。この示唆にもとづいて、アーノルドの14種類の例外型特異点の一部から3次元の自由因子を構成できた。その中には階数3の複素鏡映群の判別式も含まれることもわかった。

次の問題は、このようにして求めた自由因子に沿って特異点を持つ一意化方程式の構成である。この問題についての成果は、2009年の日豪特異点ワークショップの報告集に発表した。また階数3の複素鏡映群の判別式の場合の一意化方程式の分類については、加藤満生氏との共著を2014年の Kyushu J. Math. に発表した。

ここで得られた一意化方程式は解空間が3次元である3変数のホロノミック系であるが、基本的な疑問は、このようなホロノミック系が簡単な解を持つものや古典的な微分方程式に還元されるかどうか、ということである。還元されない根拠とみることができ、一意化方程式からパンルベ VI 方程式の代数関数解を構成できるとの知見を得た。

2. 研究の目的

本研究では次のテーマを目的とする。中心的なテーマは(4)である。

- (1) アフィン3次元空間の自由因子の構成。
- (2) (1)で得られた自由因子に沿って特異点を持つホロノミック系の構成。
- (3) (2)で求めたホロノミック系とパンルベ VI 方程式の代数関数解との関係の解明。
- (4) 逆問題「パンルベ方程式の代数関数解から出発して、自由因子とホロノミック系を構成して、もとの代数関数解を導け」を考察する。

3. 研究の方法

本研究は平成26年度から平成28年度までの3年間で実施する。

自由因子とそれに関連するホロノミック系の構成、それらとパンルベ VI 方程式の代数関数解との関係、4次元アフィン空間の自由因子、自由因子の不変量などを主に研究する。これらの研究課題の遂行のため、研究代表者

を中心に連携研究者である琉球大学・加藤満生教授、同・眞野智行准教授の協力のもと実施する。

4. 研究成果

3次元アフィン空間の自由因子に沿って特異点を持つホロノミック系とパンルベ VI 方程式の代数関数解との関係を調べる方向で、連携研究者と共同で研究を進めていた。その過程で、私たちの研究が B. Dubrovin の定式化したフロベニウス多様体の理論と密接に関係することに気づき、得られていた知見とフロベニウス多様体の理論との関係を解明することにした。その結果、C. Sabbah の著書 'Isomonodromic Deformations and Frobenius Manifolds' にある Saito structure without metric が私たちの扱っていた対象であることがわかった。フロベニウス多様体の理論では WDVV 方程式の解であるプレポテンシャルが重要な役割を果たす。Saito structure without metric はフロベニウス多様体を拡張した概念であり、一般にはプレポテンシャルは存在しない。その代わりに、ポテンシャル・ベクトル場を考えるとよいことに気付いた。n次元の場合、ポテンシャル・ベクトル場はn個の関数を成分とするベクトルであり、WDVV 方程式を拡張させた方程式の解として特徴づけられる。Dubrovin その他の研究したフロベニウス多様体とその応用を、Saito structure without metric の場合に拡張することで、次の結果を得た。

(1) フロベニウス多様体とある微分方程式の変形とが関係するが、それにあたるものとして大久保型微分方程式の変形族を導入する。すると、まず初めの成果として、ポテンシャル・ベクトル場の存在と、大久保型微分方程式の変形族が積分可能であることが同値であることを示せた。この結果を3次元の場合に適用すると、パンルベ VI 方程式との関係が明瞭になる。つまり、3次元フロベニウス多様体とパンルベ VI 方程式の1-パラメータ族との関係を Dubrovin は確立したが、Saito structure without metric とはパンルベ VI 方程式の完全パラメータ族との関係が明確になることを示せた。これは、すでに Arsie-Lorenzoni も示していたことであるが、パンルベ VI 方程式の平坦座標、ポテンシャル・ベクトル場の存在を示したことは画期的な成果である。

(2) フロベニウス多様体の理論の原型は Saito-Yano-Sekiguchi による実有限鏡映群の不変式環の特別な生成系(平坦座標と呼んだ)の存在についての研究であった。複素有限鏡映群の場合に類似の結果を求めることは40年近い長年の懸案であった。Saito structure without metric をこの場合に適用することで、well-generated という条件を満たす複素有限鏡映群の場合に平坦座標を導入でき、さらにポテンシャル・ベクトル場の存在も示した。

(3) パンルベ VI 方程式の代数関数解と自由因子、それに沿って特異点を持つホロノミック系との関係を調べることが当初の主要な研究目的であったが、それについては、代数関数解から平坦座標、ポテンシャル・ベクトル場の具体形を求める問題へと発展した。Dubrovin-Mazzocco の求めた正 2 0 面体と関係する代数関数解の場合にもとのポテンシャルを代数関数として簡明な表示を求めることができた。一方では、Dubrovin による結果だが、3 次元フロベニウス多様体の多項式プレポテンシャルの分類がある。これに関係した結果であるが、Saito structure without metric のポテンシャル・ベクトル場で多項式が成分であるものの例をいくつか求めることができた。また代数関数を使ったポテンシャル・ベクトル場も求めることができた。これらの結果は、複素鏡映群の判別式とは限らない 3 変数の自由因子の応用という視点からみても大変興味深い知見を与える。

(4) 平坦構造は、元来、単純特異点の普遍変形族と関係して定式化された概念であるが、単純特異点は実鏡映群と対応する。複素鏡映群の場合には、単純特異点のある種の変形族と関係するようにできるか、という問題がある。これはアーノルドの問題として定式化されている。この問題を、それまで考える対象として難しいと思われていたヴァレンチナー鏡映群の場合を扱った。ヴァレンチナー鏡映群の判別式とある平面曲線の変形族との関係を与えた。平坦構造との関係は今後の課題である。

以上の結果のうち、(1)-(3)は 5 . (1), 5 . (2), 5 . (3) および現在投稿中、投稿予定の論文に詳述している。また(4)の内容は 5 . (1)に詳述している。

5 . 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 3 件)

- (1) J. Sekiguchi, The discriminant of Valentiner reflection group and deformations of a plane curve, Saitama Math. J. 査読有、vol. 31 (2017), 161-170.
- (2) M. Kato, T. Mano and J. Sekiguchi, Flat structures and algebraic solutions to Painleve VI equations, Analytic, Algebraic and Geometric Aspects of Differential Equations, Trends in Mathematics, 査読有, 印刷中 DOI:10.1007/978-3-319-52842-7_11,
- (3) M. Kato, T. Mano and J. Sekiguchi, Flat structures without potentials, Revue Roumaine Math. Pures Appl., 査読有、vol. 60 (2015), 481-505.

[学会発表](計 17 件)

- (1) 関口次郎, Uniformization model of type A_3 and almost Belyi functions, 農工大数学セミナー2017, 2017 年 3 月 21 日-3 月 23 日(東京農工大学), 東京都小金井市
- (2) 関口次郎, A_3 型一意化モデルについて、近畿大学数学談話会, 2017 年 3 月 10 日(近畿大学) 大阪府東大阪市
- (3) 関口次郎, 平坦構造と鏡映群、東京電機大学数学講演会, 2017 年 2 月 20 日(東京電機大学) 東京都足立区
- (4) J. Sekiguchi, Flat structure and potential vector fields related with algebraic solutions to Painleve VI equations, Integrable Systems 2016, 2016 年 12 月 1 日-12 月 2 日, University of Sydney, シドニー(オーストラリア)
- (5) 関口次郎, パンルベ VI 方程式の代数関数解と対応するベクトル・ポテンシャルについて、アクセサリー・パラメーター研究会, 2016 年 8 月 23 日-8 月 25 日(東京大学玉原国際セミナーハウス) 群馬県沼田市
- (6) 関口次郎, 鏡映群の平坦構造と関連する話題、研究集会「表現論と非可換調和解析をめぐる諸問題」, 2016 年 6 月 28 日-7 月 1 日(京都大学数理解析研究所) 京都府京都市
- (7) 関口次郎, Examples of algebraic solutions to Painleve VI equation treated by Dubrovin and Mazzocco, アクセサリー・パラメーター研究会, 2016 年 3 月 22 日-3 月 25 日(熊本大学理学部) 熊本県熊本市
- (8) 関口次郎, 自由因子と微分方程式、2016 年度日本数学会年会, 2016 年 3 月 16 日-3 月 19 日(筑波大学) 茨城県つくば市
- (9) J. Sekiguchi, Flat structures and algebraic solutions to Painleve VI equation, Seminar at Taida Institute for Mathematical Sciences, 2016 年 2 月 22 日, National Taiwan University, 台北市(台湾)
- (10) J. Sekiguchi, Deformations of plane curves related with the Valentiner group, Seminar at Department of Mathematics, 2016 年 2 月 18 日, National Chung Chen University, 嘉義県民雄郷(台湾)
- (11) J. Sekiguchi, A generalization of WDVV equation and its application, Mirror Symmetry and Algebraic Geometry 2015, 2015 年 12 月 7 日-12 月 8 日(京都大学数学教室) 京都府京都市
- (12) J. Sekiguchi, Deformation of a plane curve related with the Valentiner group, The sixth Japanese-Australian Workshop on Real and Complex Singularities, 2015 年 11 月 23 日-11 月 27 日(鹿児島大学理学部)

鹿児島県鹿児島市

- (13) 関口次郎、平坦構造入門、大域解析セミナー、2015年10月27日(熊本大学理学部) 熊本県熊本市
- (14) J. Sekiguchi, A generalization of WDVV equation and flat structures, Analytic, Algebraic and Geometric Aspects of Differential Equations, 2015年9月7日-9月12日、ベドレヴォ(ポーランド)
- (15) 加藤満生、眞野智行、関口次郎、Flat structure on the space of isomonodromic deformations, The 10th Kagoshima Algebra-Analysis-Geometry Seminar, 2015年2月16日-2月19日(鹿児島大学理学部) 鹿児島県鹿児島市
- (16) 加藤満生、眞野智行、関口次郎、Flat structure on the space of isomonodromic deformations, 超幾何方程式研究会2015、2015年1月5日-2015年1月7日(神戸大学瀧川記念学术交流会館) 兵庫県神戸市
- (17) 眞野智行、Flat structure on the space of isomonodromic deformations, 2015年度日本数学会年会、2015年3月21日-3月24日(明治大学駿河台キャンパス) 東京都千代田区

6. 研究組織

(1)研究代表者

関口 次郎 (SEKIGUCHI, Jiro)

東京農工大学・大学院工学研究院・教授

研究者番号：30117717

(2)研究分担者

なし

(3)連携研究者

加藤 満生 (KATO, Mitsuo)

琉球大学・教育学部・教授

研究者番号：50054043

眞野 智行 (MANO, Toshiyuki)

琉球大学・理学部・准教授

研究者番号：60378594