

令和 2 年 6 月 9 日現在

機関番号：12611

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2014～2019

課題番号：26400112

研究課題名(和文)非可換確率空間におけるフィッシャー情報量とエントロピーの変形に関する研究

研究課題名(英文) Deformation of Fisher information and entropy in non-commutative probability spaces

研究代表者

吉田 裕亮 (Yoshida, Hiroaki)

お茶の水女子大学・基幹研究院・教授

研究者番号：10220667

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,500,000円

研究成果の概要(和文)：本研究においては、非可換確率空間における独立性に呼応した量子変形エントロピー・Fisher 情報量の研究を行った。Fisher 情報量の変形においては、スコア関数に着目し、ポテンシャル関数による独立性対応を調べた。特に、自由独立性での第2種ベータ分布ならびに F-分布 および t-分布等の自由類似分布の導入に成功し、Fisher 情報量の独立性に呼応した変形を捉えることが可能となった。さらに、成分間に相関のある場合のランダム行列のスペクトル極限分布のゆらぎを厳密に与え、それらを統計的データ解析に応用することにも成功した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

本研究における、非可換確率空間における変形エントロピーならびに Fisher 情報量に関する調査により、変形独立性を持つ多様性についての理解が深まり、非可換確率論、特にランダム行列を用いた自由確率論統計的データ解析などの他分野への応用が開拓された。今後さらに機械学習など、その応用分野の拡張が期待されるようになった。

研究成果の概要(英文)：In this study, we have investigated quantum deformed entropy and Fisher information in non-commutative probability space. Using the correspondence between quantum deformed independence and potential functions, the free analogue of the beta prime distribution and its related distributions, F-distribution and t-distribution, have been introduced to the theory of free probability related to the score function of Fisher information. Furthermore, we have succeeded to give an application of random matrices to the statistical data analysis, which allows us to expect further applications of non-commutative probability theory to other fields.

研究分野：非可換確率論

キーワード：非可換確率論 作用素環論 関数解析学 エントロピー 量子変形

1. 研究開始当初の背景

本研究は非可換確率空間における確率分布の変形, 特に独立性の概念の変形に基づきこれらに呼応した Fisher 情報量ならびにエントロピーの量子変形を研究対象としている. 非可換確率空間においては独立性の概念は一通りではない. 独立性とは, 任意の混合モーメントの計算則を与えるものと考えられるならば, ある公理の下では, 3種類しか入らない. すなわち「通常 (テンソル) 独立」, 「自由独立」, 「ブール独立」の3つである. しかし, これは独立性の陽 (explicit) な捉え方である. 非可換確率論においても独立性の概念は分布の (加法的) 合成積を導き, 合成積はいわゆるモーメント・キュムラント公式で記述される. したがって, モーメント・キュムラント公式が, 陰 (implicit) に独立性を定めていると考えられる. これを非可換確率空間における独立性の変形の鍵と捉えて研究代表者は調査研究を行ってきた.

上述の3つの独立性 (通常・自由・ブール) の概念の間には, 驚くほど密接した組合せ論的類似性があることが知られている. この組合せ論的対象は順序集合の分割である. 通常独立性でのモーメント・キュムラント公式には, 全ての分割が対応し, 自由独立性の場合には, 分割が非交叉分割にのみに制限される. またブール独立性の場合には, 非交叉分割の特殊な場合である区間分割にさらに制限されることになる. このことから1径数 ($0 \leq q \leq 1$) で通常独立性 ($q = 1$) と自由独立性 ($q = 0$) を補間する変形独立性として, 分割交叉数の q -数え上げにより非交叉分割への制限を表現する q -変形モーメント・キュムラント公式による q -変形独立がある. また Voiculescu は全 Fock 空間において互いに直交するベクトルに付随した生成・消滅作用素達が真空期待値に関して互いに自由独立であることを示し, 全 Fock 空間上で自由合成積を与えるキュムラント母関数 (R -級数) に対応する標準作用素を構成した. さらに Fock 空間での交換関係 (粒子統計) の違いが独立性に対応することもみていた. すなわち, 正準交換関係 (CCR) の対称 Fock 空間 (Bose 粒子) が通常独立性, 正準反交換関係 (CAR) の反対称 Fock 空間 (Fermi 粒子) がブール独立性にそれぞれ対応する. このことから交換関係の変形を独立性の変形と捉えることも可能である. 実際に, q -Fock 空間 (q -CCR) と上で述べた分割交叉数の q -数え上げは q -Wick 公式として対応する.

しかし, 非可換確率空間において通常独立性と自由独立性以外の変形独立性の下での Fisher 情報量やエントロピーの変形は, まだ整備されていない状況であった. そこで, 本研究課題では, 非可換確率空間における確率分布の変形ならびに, これら変形に呼応したエントロピーおよび Fisher 情報量の量子変形に関する研究を開始した.

2. 研究の目的

通常確率空間は, 基礎空間 Ω , σ -集合体 \mathcal{F} , 確率測度 μ からなる3つ組 $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ である. Ω 上の可測関数 X が確率変数であり, X が可積分ならば, その期待値 $\mathbb{E}(X)$ は Ω 上での μ -積分で与えられる. ここで Ω 上の有界な可測関数全体からなる関数環を考えると, これは可換な Banach 代数をなす. この可換な Banach 代数と Ω 上の積分で与えられる期待値写像を併せれば, Gelfand の定理により, 元の確率空間を復元するに足る十分な情報が含まれていることがわかる. 非可換確率空間とは, このように確率空間を代数的に取り扱い, 抽象的に非可換化することで与えられる. すなわち \mathcal{A} を単位元 $\mathbf{1}$ を含む一般に非可換な代数とし, ϕ を $\phi(\mathbf{1}) = 1$ を満たす \mathcal{A} 上の線形汎関数とする. このとき, これらの組 (\mathcal{A}, ϕ) が非可換確率空間である. 解析的な議論を行なうには, 代数 \mathcal{A} には, 何らかの位相的構造は必要であり, 通常 \mathcal{A} を C^* 環, ϕ を \mathcal{A} 上の状態として議論する. これは確率分布がより現実的なものとして与えられる場合でもある. すなわち, C^* 環の元である確率変数 $a \in \mathcal{A}$ が自己共役作用素のときは, スペクトル分解を考えることにより, スペクトル測度を介して, 実数上のコンパクトな台をもつ確率測度が自然に誘導される. 研究代表者は, 非可換確率空間におけるこのような確率分布の変形を研究対象としてきた.

通常確率論において, Fisher 情報量およびエントロピーは確率分布の特性量として重要な量であり, 非可換確率空間における確率分布においても重要な役割を果たすものであると考えるのは自然である.

実際、自由独立に基づく自由確率論においては、確率分布の Hilbert 変換が Stein 関係式を通して微分作用素に対応することを Voiculescu は発見し、Fisher 情報量を導入するに必要なスコア関数の自由類似を構成した。すなわち conjugate variable である。Fisher 情報量からエントロピーの導出には、通常確率論で知られている独立 Gauss 摂動についてのエントロピーと Fisher 情報量の関係、いわゆる de Bruijn 等式が用いられる。研究代表者は、自由確率論における自由 Fisher 情報量と自由独立半円摂動に関する研究において、自由独立な半円摂動の Fisher 情報量が、条件付き分散をもって表わされることを示した。ここでの条件付き分散とは、ある部分環への条件付き期待値で与えられる作用素の L^2 ノルムであり、このことは独立 Gauss 摂動が施された確率変数の Fisher 情報量は適当な部分環への条件付き期待値による条件付き分散で導入可能であることを示唆し、そして実際に自由独立性においては、これが可能であることが示された。

この方法論を用いて、一般の非可換独立性に拡張し、適切な部分環を見つけ、その部分環への条件付き期待値による条件付き分散をもって、変形独立 Gauss 摂動タイプの確率変数に対して非可換 Fisher 情報量が構成し de Bruijn 等式を経由することにより、対応する非可換エントロピーが導出可能であるかを調査する。これより非可換独立性が持つ多様性に関する理解を深め、今後の非可換確率論の更なる応用分野の開拓へと発展させることが目的である。

3. 研究の方法

非可換確率論における独立性と Fisher 情報量ならびにエントロピーの関係について de Bruijn 等式の調査から始める。通常確率過程の言葉では、単純な熱拡散による時間発展に関するエントロピーの時間微分であり、ドリフト項を含まない拡散過程に対応する。本研究では相対 Fisher 情報量および相対エントロピーを考え、拡散過程はある凸関数をポテンシャルとするドリフト項を持つ拡散過程による時間発展に一般化する。この手法は研究代表者が自由独立性に基づく拡散過程における自由相対エントロピーの時間微分と自由相対 Fisher 情報量との関係からより、対数 Sobolev 不等式および輸送コスト不等式等の関数不等式の時間積分の手法を用いて導出する研究を行っていることから合理的である。

さらに変形 Fisher 情報量として、自由独立性による自由 Fisher 情報量と通常確率論の独立性に基づく Fisher 情報量を補間する、いわゆる q -Fisher 情報量の研究へと発展させる。この q -変形の重要な点は Bozejko-Speicher による q -変形 Fock 空間に基づいた q -Gauss 分布や Saitoh-Yoshida による q -Poisson 分布、また Bryc-Bozejko による q -Meixner 分布族など、変形分布の例も豊富にあり変形独立性ならびに変形 Fisher 情報量、変形エントロピーの研究を進める上でも重要な領域であると考えられる。さらに、 q -変形 Fock 空間上で q -生成・消滅作用素を用いた、これら q -変形分布を持つ非可換確率変数の構成が与えられている点も重要であると考えられる。

本研究においては、 q -Fisher 情報量ならびに q -エントロピーの構成に関連して q -変形 Meixner 分布の特徴付けならびにそれらの 2 径数変形への拡張、非可換拡散過程の平衡分布とポテンシャル関数の関係の解明、ポテンシャル関数を介した非可換独立性間の対応関係の解析、ランダム行列モデルからの変形分布へのアプローチなど非可換確率空間の多面的な扱いを援用しながら本研究を進めてきた。

各年度においても、国内外での関連研究集会・ワークショップへの積極的な参加と関連研究者との研究討議を実施するなどの数理科学の標準的な研究手法で進めてきた。また最終年度においては、本科研費に支援された非可換確率論に関するワークショップを、外国からの研究者も招いて研究代表者所属機関において開催し、今後の本研究の発展の方向に関する討議も行った。

4. 研究成果

本研究課題の実施期間中に学術論文で公表した研究成果についてまとめる。

(1) 拡散過程と相対エントロピーおよび Fisher 情報量の積分表示

自由相対エントロピーおよび自由 Fisher 情報量と関連の深い分布間距離のひとつである Wasserstein 距離の自由確率論における振る舞いに関する研究において、確率分布の自由拡散過程による時間発展を考え、これらの量の時間微分の厳密な計算を行った。その結果として、自由確率論における輸送コスト不等式および対数 Sobolev 不等式をこの微分公式に基づいた時間積分の手法による証明を与えることに成功した。

さらに通常確率論の de Bruijn 関係式の相対エントロピー版への拡張を行った。本研究においては、参照 (reference) 測度と対象 (object) 測度の両方を Gauss 型確率変数の独立増分による時間発展、つまり単純な熱拡散ではなく、より一般の Fokker-Planck 方程式による拡散過程に変えることにより、新たな関係式を導くことに成功した。これにより、相対エントロピーの相対 Fisher 情報量による新たな時間積分表示も与えられ、今まで知られていたエントロピー・ギャップを特殊な場合として含む、積分表示を導くことに成功した。

(2) 要素間に相関を持つランダム行列のスペクトル極限分布に関して

非可換確率論、特に自由確率論における自由独立の重要なモデルであるランダム行列に関して基礎的調査を行った。要素間に相関のあるランダム行列のスペクトル極限分布に関する調査では、特に要素が行方向に MA モデルで与えられる相関のある場合を進展させて、2次漸近挙動としての分布モーメントのゆらぎについての研究を行った。その結果、成分間に ARMA モデルで相関があるようなランダム行列においても複合 Wishart 行列として与えられることを明らかにし、2次漸近挙動であるモーメントのゆらぎを厳密に求めることに成功した。これに基づきスペクトル極限分布のゆらぎと高次自由独立性の時系列データ解析への応用、すなわち時系列解析の ARMA モデルに対する新たな適合度検定手法を提示した。本成果は、非可換確率論を統計的データ解析に応用する開拓的なものであり、統計学者からの関心も得た。

(3) 変形 Meixner 分布に関して

自由独立性と通常独立性の補間に関する調査として、 q -変形 Meixner 分布に関する調査を行った。特に、 q -Meixner 分布族を分布として持つ非可換確率変数を B 型 Fock 空間でも構成可能であることを示した。これは既に A 型 Fock 空間、すなわち今まで知られている q -変形 Fock 空間上での構成の拡張に当たるものであり、変形パラメータが 2 変数に拡張されている。特に、個数作用素に対応する部分を既出の手法である消滅作用素と生成作用素の積の形ではなく、新たに定義する手法も併せて提案している。この提案手法は変形 Poisson 分布など変形 Gauss 型確率変数の以外の Meixner 分布のクラスの変形可能性の範囲を大きく広げるものであり、今後の発展も期待される。

(4) ポテンシャル関数の基づく変形分布の対応に関して

ポテンシャル関数 V によるドリフト項を持つ拡散過程の時間発展は V' に依存した Fokker-Planck 方程式により記述される。そして通常独立および自由独立における Fokker-Planck 方程式の平衡分布のスコア関数は、いずれも同じポテンシャル微分 V' で与えられる。これに着目し、自由独立性に基づく特徴付けにより導かれる第 2 種ベータ分布の自由類似が、通常独立の下での第 2 種ベータ分布と同じ Gibbs ポテンシャルに付随した平衡分布として与えられることも明らかにした。

さらに、第 2 種ベータ分布から変数変換で派生して得られる F -分布族や t -分布族、さらに第 1 種ベータ分布や Gamma 分布でも Gibbs ポテンシャルを介した古典・自由独立性間の分布対応が成り立つことも示した。

このことは Fisher 情報量を与えるスコア関数を介して異なる独立性間の対応を与えたことになり、本研究課題の非可換確率空間での Fisher 情報量の変形が独立性の変形の呼応する具体例を明示するものである。これらの研究成果は、今後より一般の分布特性量と独立性の対応に関する研究への発展につながるものと期待している。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計5件（うち査読付論文 5件／うち国際共著 0件／うちオープンアクセス 1件）

1. 著者名 Hiroaki Yoshida	4. 巻 -
2. 論文標題 Remarks on a Free Analogue of the Beta Prime Distribution	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Journal of Theoretical Probability	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s10959-019-00924-x	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Nobuhiro Asai, Hiroaki Yoshida	4. 巻 60
2. 論文標題 Poisson type operators on the Fock space of type B	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Journal of Mathematical Physics	6. 最初と最後の頁 11702
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1063/1.5074114	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Hasegawa Ayako, Sakuma Noriyoshi, Yoshida Hiroaki	4. 巻 127
2. 論文標題 Fluctuations of Marchenko-Pastur limit of random matrices with dependent entries	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Statistics & Probability Letters	6. 最初と最後の頁 85～96
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.spl.2017.03.022	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Hiroakki Yoshida	4. 巻 19
2. 論文標題 A Dissipation of Relative Entropy by Diffusion Flows	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Entropy	6. 最初と最後の頁 9
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.3390/e19010009	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

1. 著者名 Aya Nemoto, Hiroaki Yoshida	4. 巻 17
2. 論文標題 The free logarithmic Sobolev and the free transportation cost inequalities by time integrations	5. 発行年 2014年
3. 雑誌名 Infinite Dimensional Analysis, Quantum Probability and Related Topics	6. 最初と最後の頁 1450022 24p.
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1142/S0219025714500222	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計9件 (うち招待講演 5件 / うち国際学会 3件)

1. 発表者名 Hiroaki Yoshida
2. 発表標題 The free beta prime distribution and related free analogues
3. 学会等名 Interactions between commutative and non-commutative probability, The JSPS Program of Bilateral Joint Seminars (JP-FR) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Hiroaki Yoshida
2. 発表標題 The free analogue of the beta prime distribution and its properties
3. 学会等名 Non-commutative probability and related fields (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 吉田裕亮
2. 発表標題 自由確率論における Fokker-Planck 方程式とエントロピー消散
3. 学会等名 第57回実函数論・函数解析学合同シンポジウム (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Hiroaki Yoshida
2. 発表標題 On a selfadjoint q -Meixner operator
3. 学会等名 研究集会「非可換確率論とその応用」
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Hiroaki Yoshida
2. 発表標題 Remarks on the fluctuation moments of Wigner matrices
3. 学会等名 17th Workshop: Noncommutative Harmonic Analysis (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 吉田 裕亮
2. 発表標題 ランダム行列の2次漸近挙動と組合せ論
3. 学会等名 量子論にまつわる数学と数論の連携探索
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Hiroaki YOSHIDA
2. 発表標題 Remarks on the limit spectral measure of the Wigner matrix with certain dependence
3. 学会等名 10th Jikji-Workshop on Infinite Dimensional Analysis and Quantum Probability (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2015年

1. 発表者名 Hiroaki YOSHIDA
2. 発表標題 On limit distributions and fluctuations of Marchenko-Pastur limit of random matrices with dependent entries
3. 学会等名 International Conference on Quantum Probability and Related Topics (Satellite Conference of Seoul ICM), 9th Jikji-Workshop on Infinite Dimensional Analysis and Quantum Probability
4. 発表年 2014年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

<p>お茶の水女子大学 研究者情報 研究者詳細 吉田 裕亮 http://researchers2.a.o.ocha.ac.jp/html/100000841_ja.html</p>
--

6. 研究組織		
	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)
		備考