

平成 29 年 6 月 22 日現在

機関番号：14301

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2014～2016

課題番号：26400114

研究課題名(和文)非可換解析学と関数解析的群論

研究課題名(英文)Noncommutative Analysis and Functional Analytic Group Theory

研究代表者

小沢 登高(Ozawa, Narutaka)

京都大学・数理解析研究所・教授

研究者番号：60323466

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,700,000円

研究成果の概要(和文)：本計画では研究代表者が推進する「関数解析的群論」のスローガンのもと様々な研究を行った。まず、Breuillard, Kalantar, Kennedyとの共同研究において、離散群 C^* 環がいつ単純であるかという長年の問題に対して、境界作用を用いる画期的な研究方針を導入し、この方面で得られていたこれまでの成果を一新する大きな成果を得た。さらに、離散群上の調和解析について研究を行い、著名なGromovの多項式増大度定理(1981)に対する極めて簡単な証明を発見した。それに続くErschlerとの共同研究では、この新手法とランダムウォーク理論を融合させることにより、多項式増大度定理の一般化を行った。

研究成果の概要(英文)：Narutaka Ozawa has conducted research on discrete groups under the slogan "Functional analytic group theory." He studied (in collaboration with E. Breuillard, M. Kalantar, and M. Kennedy) the characterization of the simplicity for the reduced group C^* -algebra and obtained a breakthrough result. Next, he turned to the harmonic analysis on discrete groups and found a quite simple proof to the famous Gromov theorem stating that a group of polynomial growth is virtually nilpotent. Combining the new method with random walk theory, he (in collaboration with A. Erschler) generalized the Gromov theorem.

研究分野：関数解析的群論

キーワード：作用素環 離散群 フォンノイマン環 ランダムウォーク

1. 研究開始当初の背景

私は作用素環と離散群の関わりを研究している。(離散)群とは、任意の対象の対称性を記述するための数学言語である。例えば、ある結晶が与えられたとき、その結晶構造を変えない変換(回転操作、鏡映操作、反転操作など)全体を考えたものが群である。人間には線形的な構造の方が理解しやすいので、群の各要素を適当な(線形)空間上の作用素とみなして取り扱うことにする。さらに、そうした作用素全体が生成する代数系を考え、適当な位相で完備化すれば作用素環と呼ばれる対象ができる(考える位相の違いにより、 C^* 環とフォンノイマン環の二種類が存在する。)位相の存在により、群論のような代数的な問題に対しても解析的なテクニックを使えるところが作用素環論の特徴である。作用素環の研究はそもそも、John von Neumann が量子力学の数学的取り扱いを目指して始めたものであったが、現在では数理物理だけでなく、群論やエルゴード理論などに幅広い応用がある。私の研究は双方向的で、これらの分野への作用素環論の応用とその逆を同時に扱っている。

2. 研究の目的

関数解析的群論という独自の標語をつくり、それに内容を伴わせるべく研究を行っている。群は固より代数的な存在であるが、関数解析的群論の要点は、群に隠された解析的な性質を見抜き、それを利用することによって離散群の構造を研究することにある。例えば、キッチリとした代数的構造に比して、解析的な性質はある種の摂動に対して安定的であるといったことを利用する。本研究計画で特に興味を持って研究を進めたのは、「群の性質がその群 C^* 環(あるいは群フォンノイマン環)にどう反映されるか?」、「群の代数的構造をランダムウォークの挙動から見てとれるか?」といったことである。

3. 研究の方法

個人で行う日常の研究はもちろん重要であるが、数学研究においては他の研究者と着想を交換することも極めて重要である。そのため、国内外の研究集會に積極的に参加し、研究成果の発表、参加者との研究連絡、最新の研究動向についての情報交換等を行う。また、研究集會以外にも、共同研究者としばらくの間同じ場所に滞在し、落ち着いた環境で共同研究を行うといったことも必要である。その他、書籍や会議録は適宜購入する。

4. 研究成果

本研究計画の成果を手短に纏めると、積年の未解決問題の部分的な解決([1,7])や、今後の研究に繋がる新しい現象の発見

([3,4,5])、新たな理論の構築([2,6,8])など当初の計画では予見されていなかった大きな研究成果が得られた。以下個別に説明する。

・論文[1]では被約群 C^* 環の構造を研究した。全ての従順な群は擬対角的という良い条件を満たすであろうというのが Rosenberg 予想(1986)である。擬対角性は近年の作用素環論の分類理論において重要な役割を持つ基本的な性質である。私は、京都大学の佐藤助教とコペンハーゲン大学の Rordam 教授との共同研究[1]で、Rosenberg 予想が初等的従順群という大きなクラスに対して成り立つことを証明した。証明には近年の分類理論の成果を使った。なおこの問題は、その後別の研究チームによって完全に解決された。被約 C^* 環がいつ単純となるかは 40 年来の未解決問題であったが、Breuillard パリ南大学教授、Kalantar ヒューストン大学准教授、Kennedy ウォータールー大学准教授との共同研究[7]では、その問題を群の力学系理論に結びつけることにより、これまでの成果を一新する画期的な業績を得た。特にこの問題を作用素環論の問題から力学系群論の問題に帰着した。その結果、どのような離散群の被約 C^* 環が単純になるか良く分かるようになり、「従順根基が trivial であるような離散群の被約 C^* 環は単純であろう」という積年の予想に対する反例が見つかるべき十分条件を見つけた。この十分条件を満たす群(つまり上記予想の反例)はその後、力学系群論の研究者によって発見されることとなった。

・ C^* 環は Banach 環の特別な場合で、正值性の概念が存在することが特徴的である。ヒューストン大学の Blecher 教授との共同研究[2]ではこの C^* 環論における正值性の理論を、一般の Banach 環論に移植することを試み、Banach 環論における正值性の理論を構築した。当初の見込み以上に多くのことが移植できたので、この研究は成功したと言える。この理論の応用を探るのは今後の課題である。

・ヒルベルト空間 H 上の有界線形作用素全体のなす C^* 環 $B(H)$ は C^* 環の最も基本的な例のひとつである。この $B(H)$ ふたつのコピーの間のテンソル積に何種類の C^* ノルムが考えられるかという問題を考察し、少なくとも連続無限個の異なるものが存在するという結果[3]を得た。これは共同研究者の Pisier パリ大学教授の以前の結果(少なくとも 2 個存在する)を強化するものである。ただし、実際に幾つ存在するのかは未解決である。連続無限濃度とその冪濃度の間にあることは確かであるが、ひょっとすると ZFC 公理系と独立した問題であるかもしれ

ない．それについては今後の研究が待たれるところである．

・有限型フォンノイマン環に対する充足性の概念は幾つかのフォンノイマン環を見分けるために von Neumann その人が導入したものであるが、後に Connes により一般のフォンノイマン環に対して拡張された．論文 [4] では 群測度空間フォンノイマン環がいつ充足となるかを考察し、それなりに多くの場合に成り立つことを示した．これは Houdayer パリ南大学教授と磯野優介京大助教の成果を一部拡張するものである．特に連結単純 Lie 群の格子の等質空間への作用を考え、そこからできる群測度フォンノイマン環が充足となる必要十分条件を得た．この充足フォンノイマン環のさらなる構造解析は今後の課題である．

・群に関する概念に Haagerup の性質という重要なものがある．離散群の場合、この群の性質が群フォンノイマン環に反映されるというのは基本的定理である．大阪教育大学の岡安准教授、北海道大学の戸松准教授との共同研究 [5] では 離散群を一般の局所コンパクト群に置き換えても、群がこの性質を持つなら、それが群フォンノイマン環に反映されることを証明した．さらに一般的な局所コンパクト量子群でも同様のことが成り立つことを証明した．離散群を局所コンパクト (量子) 群に置き換えることにより、研究対象となるフォンノイマン環が取り扱いのしやすい有限型からそうでない無限型にかわる．この問題を解決するために、この研究では一般のフォンノイマン環に対する双加群の理論を発展させた．

・論文 [6] とそれに続く Erschler パリ高等師範学校教授との共著論文では、群の解析的な性質が代数的構造に反映されるということを示した．特に、ランダムウォークの拡散速度が十分に遅い無限群は、有限指数部分群であって無限巡回群への全射準同型を持つものを含むことを示した．この定理は例えば、多項式増大度を持つ群に適用でき、ここから著名な Gromov の多項式増大度定理 (1981) をとても簡単に証明することができる．証明は群の幾何学と解析学を関数解析・作用素論・確率論・エントロピー理論等を通じて代数的構造と関連させるという全く新しいものである．新理論の今後の応用が期待される．

・その他の研究に、Connes 埋め込み問題への新アプローチの考案がある．Connes の埋め込み予想は現在の作用素環論における最大の未解決問題で、量子情報理論における Tsirelson 予想などとも同値であることが知られている．この問題に対する新機軸としてアルゴリズム的側面を考察した．

5．主な発表論文等
(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計6件)

全て査読有

[1] N. Ozawa, M. Rordam, Y. Sato;
“Elementary amenable groups are quasidiagonal.”

Geom. Funct. Anal., 25 (2015), 307--316.
doi: 10.1007/s00039-015-0315-x

[2] D. Blecher, N. Ozawa;
“Real positivity and approximate identities in Banach algebras.”

Pacific J. Math., 277 (2015), 1--59.
doi: 10.2140/pjm.2015.277.1

[3] N. Ozawa, G. Pisier;
“A continuum of C^* -norms on $B(H) \otimes B(H)$ and related tensor products.”

Glasg. Math. J., 58 (2016), 433--443.
doi: 10.1017/S0017089515000257

[4] N. Ozawa;
“A remark on fullness of some group measure space von Neumann algebras.”

Compos. Math., 152 (2016), 2493--2502.
doi: 10.1112/S0010437X16007727

[5] R. Okayasu, N. Ozawa, R. Tomatsu;
“Haagerup approximation property via bimodules.”

Math. Scand., to appear.

arXiv:1501.06293

[6] N. Ozawa;
“A functional analysis proof of Gromov's polynomial growth theorem.”

Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4), to appear.

arXiv:1510.04223

[7] E. Breuillard, M. Kalantar, M. Kennedy, N. Ozawa;

“ C^* -simplicity and the unique trace property for discrete groups.”

Publ. Math. IHÉS, to appear.

arXiv:1410.2518

[学会発表](計9件)

発表者は全て N. Ozawa

[1] “Approximation Properties for Group C^* -Algebras.” (4-hour minicourse),

・Banach and Operator Algebras over Groups, Fields Institute (カナダ), 2014/04/01-04.

[2] “Elementary amenable groups are quasidiagonal.”

・Operator Algebras and Applications (ICM Satellite Conference), Cheongpung (韓国), 2014/08/11.

・Operator Methods in Harmonic Analysis, Belfast (イギリス), 2014/08/18.

[3] “The Furstenberg boundary and C^* -simplicity.”

・Workshop on C^* -algebras: Structure and Classification, WWU Münster (ドイツ), 2015/04/23.
・NCGOA, Vanderbilt University (米国), 2015/05/01.
[4] “Introduction to Noncommutative Real Algebraic Geometry” (4-hour minicourse).
・Measured group theory, Erwin Schrodinger Institute (オーストリア), 2016/02/08-12.
[5] “A functional analysis proof of Gromov's polynomial growth theorem.”
・Nordic Congress of Mathematics, Stockholm (スウェーデン), 2016/03/18.
・MSJ-SI: Operator Algebras and Mathematical Physics (3-hour minicourse), 東北大学, 2016/08/01-05.
[6] “A continuum of C^* -norms on $B(H) \otimes B(H)$ and related tensor products.”
・Workshop Classification and set theory, Mittag-Leffler Institute (スウェーデン), 2016/03/21.
[7] “A remark on fullness of some group measure space von Neumann algebras.”
・Noncommutative Geometry and Operator Algebras, Hausdorff Research Institute for Mathematics (ドイツ), 2016/05/19.
・Workshop Classification and dynamical systems II: Von Neumann Algebras, Mittag-Leffler Institute (スウェーデン), 2016/04/21.
[8] “Noncommutative real algebraic geometry of Kazhdan's property (T).”
・Asian Mathematical Conference (Plenary Speaker), 2016/07/27.
[9] “Finite-dimensional representations constructed from random walks.”
・Amenability of discrete groups, American Institute of Mathematics (米国), 2016/09/28.
・Non-positive curvature group actions and cohomology, Newton Institute (イギリス), 2017/03/16.

〔図書〕
なし

〔産業財産権〕
なし

〔その他〕
下記ウェブサイトにて自分の研究成果，研究紹介，講義録，参加した研究集会の報告等を公開している。
<http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~narutaka/>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

小澤登高 (OZAWA, Narutaka)
京都大学・数理解析研究所・教授
研究者番号：60323466

(2) 研究分担者

なし

(3) 連携研究者

なし