様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　(共通)

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ３０ 年　 ６ 月 ２６ 日現在

機関番号：１４３０１

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2014～2017

課題番号：２６４００１１５

研究課題名（和文）正則・反正則力学系のパラメータ空間の分岐と可視化

研究課題名（英文）Bifurcation in parameter spaces of holomorphic and anti-holomorphic dynamics and its visualization

研究代表者

稲生　啓行（Inou, Hiroyuki）

京都大学・理学研究科・講師

研究者番号：００３６２４３４

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,600,000円

研究成果の概要（和文）：反正則力学系におけるMandelbrot集合の類似であるtricornについて、奇数周期の双曲成分の境界に収束するexternal rayや「へその緒」が自明な場合を除いて1点に収束しないことを示した。これらはMandelbrot集合では起きない現象であり、特に「へその緒」が収束しないことは、tricornでは自己相似性が成り立たないことを示している。
また複素2次元のJulia集合やパラメータ空間の分岐測度の分布などを最近のVR機器を用いて可視化して観察する為の基本的な環境を構築し、操作法や射影の仕方、レンダリングなどの表現方法などについて様々な実験を容易に行えるようにした。

研究成果の概要（英文）：The analogue of the Mandelbrot set in anti-holomorphic dynamics is called the tricorn. We prove that external rays and "umbilical cords" accumulating to the boundaries of hyperbolic components of odd period do not converge to a point. This non-landing property implies that the tricorn is much more complicated than the Mandelbrot set. Especially, the non-landingness of "umbilical cords" implies that the tricorn does not have such a self-similar property as for the Mandelbrot set.
We also construct a fundamental environment for visualization of Julia sets and bifurcation measures in complex two dimensional space with recent VR devices, so that we can easily implement various methods for controls, projections, rendering and so on for experiment.

研究分野：複素力学系

キーワード：反正則力学系　放物型分岐　没入型仮想現実　自己相似性

１．研究開始当初の背景

複素力学系の研究においては，Mandelbrot 集合のような複雑なフラクタル集合が現れる．これらを理解する上で，計算機による可視化は重要な役割を果たしてきた．例えば Mandelbrot 集合の自己相似性などは容易に観察できる．このような数値実験は，研究を進める上ではもちろん，既知の結果を人に説明する時にも有用である．

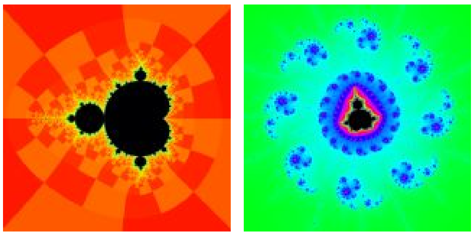

図 1：Mandelbrot 集合とそのコピー

しかしながら，複素 2 次元以上の場合にはこのような良い可視化の方法は知られていない．宇敷重廣氏が複素 Hénon 写像の可視化を進めているが，他の力学系やパラメータ空間などに応用できない方法が用いられており，一般的な方法は知られていない．このような複素 2 次元の空間のフラクタル集合の可視化の方法を確立できれば，今まで知られていなかった深い性質を観察でき，それによって新たな数学を開拓することができると期待される．
また，申請者と Kiwi は，Mandelbrot 集合の高次多項式への一般化である connectedness locus の相似性を与える候補となる矯正写像を厳密に定式化し，定義域のコンパクト性や単射性，部分的な全射性など，基本的な性質を多く示していた．一方で申請者は，相似性を与える写像がほとんどの場合連続にならないことを示していた．これは高次元のパラメータ空間においては，1 次元の場合より本質的に複雑な現象が起きていることを示している．この結果では不連続点が多く存在していることは示しているものの，具体的にどの点で不連続になるかは明確には示していなかった．
しかし実際このような例は，実 3 次多項式族や反正則 2 次多項式族などの，実 2 次元のパラメータ空間において数値的に観察されていた．例えば反正則 2 次多項式族に現れる tricorn という集合では，自己相似のコピーのように見えるが細部が異なっているものが多数存在していることが観察されており，これらは全て互いに異なるものであると予想されている．このことは特別な場合については申請者が最近計算機援用証明を与えていたが，一般には示されていなかった．

２．研究の目的

高次元のパラメータ空間に起きている複雑

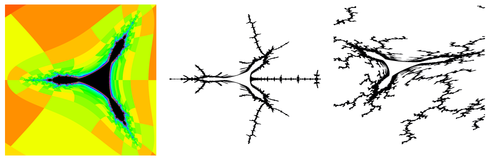

図 2：tricorn と「小 tricorn」たちの「へその緒」. 中央の例では 1 点に収束し，右の例では振動して収束しない.

な現象を理解することと，新しい可視化の方法を探求することは相互に関連しあっており，その両方を同時に研究することで，それまで手探りで進んでいるような複素力学系における高次元空間の研究を大きく前進させることが本研究の基本的な目的であった．

a) 反正則写像族について
反正則写像の 2 回合成は正則写像なので，反正則写像族は，特別な構造を持った複素力学系の(部分)族であり，様々な性質が多項式や有理関数の族全体を考えるよりも捉えやすいと考えられる．
Mandelbrot 集合や Julia 集合の研究においては，同じ点に収束する外射線によって平面を区切って組合わせ的な議論に落としこむことは重要な手法である．Douady と Hubbard が有理数の角度の外射線は 1 点に収束することを示しており，このことがこのような議論をする上での基礎となっている．一方 tricorn の場合には，奇数周期の双曲成分に収束する外射線や「へその緒」は 1 点に収束しないことが数値的に観察されており，「へその緒」は実際に収束しない場合があることが知られていた．このことを数学的に厳密に，一般的な場合に示すことは大きな目的の 1 つであった．特に「へその緒」が収束しないことは，tricorn の中の「小 tricorn」たちが実は tricorn と同相でないという予想と関連しており，これによって Mandelbrot 集合のような自己相似性は tricorn に対しては成り立たない，という重要な結果を導くからである．

b) VR による可視化
パラメータ空間の分岐カレントや分岐測度についての研究は Berteloot, Dujardin, Favre, Gautier などによって進められており，色々な近似定理などが知られている．しかしながら，これらは指数的に次数が増大する代数的集合によって近似しており，計算機で計算するのは現実的ではない上，測度の分布の偏りも大きく，放物型パラメータの周辺などを観察するのは非常に難しい．
多項式族の分岐測度については計算可能な近似定理があり，それによって分岐測度の分布を計算し可視化の試みをしていたが，近似の精度もあまり良くなく，得られた絵も複雑

すぎて理解し難いものとなっていた．この為局所的な分岐現象をより深く理解し，それも加えてより良い計算方法を開発することは重要である．
また，可視化については良いインターフェイスを開発することも重要である．当時は宇敷氏の HenonExplorer を用いて可視化をしており，立体可視化装置はまだ CAVE (Cave Automatic Virtual Environment) と呼ばれる大掛りなものが主流であった．現在普及している 3D ヘッドマウントディスプレイを用いた VR 機器は，当時はまだ Oculus 社による開発キットしか利用できなかったが，これらを用いて VR による可視化ソフトウェアを開発することは非常に重要であると考えていた．

３．研究の方法

a) 反正則写像の分岐

Hubbard と Schleicher によって，tricorn の奇数周期の双曲成分の境界に集積する「へその緒」が１点に収束しない，という結果が知られていた．この証明のアイディアは，「へその緒」に限らず，外射線のように奇数周期の双曲成分の境界に集積する様々な対象に適用できる可能性を含んでいる．どの場合にも，1 点に収束する為には非常に特殊な条件を満たさねばならず，ほとんど起きないであろうことはすぐにわかるが，実際にその条件を満たさないことを示すのが難しかった．条件を満たす場合にはある種の対称性を満たしており，Schwarz の鏡像の原理を適用してうまく議論することで証明することができるのではないかと考えていた．
また Hubbard と Schleicher の結果で 1 点に収束しないことがわかった「へその緒」たちは，「小 tricorn」たちに含まれないものだけであった．一方自明な場合(実軸とその対称軸に乗っているもの)を除けば「へその緒」は１点に収束しないであろうと予想しており，それが正しければ tricorn で１点に収束している「へその緒」が，対応する「小 tricorn」では 1 点に収束しないことになり，つまり tricorn と「小 tricorn」で対応する部分の位相的な性質が異なることになる．

b) VR による可視化

申請時には，ヘッドマウントディスプレイ型の VR 機器はまだ最初の開発キットしか存在していなかったが，既にそれを利用して複素 2 次元空間の点集合などの可視化ソフトを開発していた．当時は，コントローラは通常のゲームパッドであり，VR 空間で手にものを持って振り回したりするようなことは不可能であった．そもそも HMD にすらポジショントラッキング機能はついておらず，向きが検知できるだけであった．当時は提供されていたサンプルを元に簡単なものを作っていただけだったので，4 次元から 3 次元への射影が低速であり，対象を 4 次元的に滑らかに回転することなどは困難であった．そのため基礎的な部分から自作することで高速化し，様々な方法を実験できる環境を整えることが必要であろうと考えていた．

４．研究成果

a) 反正則力学系

Hubbard と Schleicher が示した，tricorn の奇数周期の双曲成分の境界に集積する「へその緒」が１点に収束しない，という結果のアイディアを応用して，tricorn の外射線で奇数周期の双曲成分の境界に集積するものが，周期１の場合を除いて１点に収束しないことを Mukerjee 氏と共同で示した(雑誌論文 3)．
「へその緒」についても同様に，奇数周期の双曲成分に集積するものは，自明なもの(実軸とその対称な軸に乗っているもの)以外はやはり１点に収束しないことを示した．このことは，tricorn に含まれる「小 tricorn」から tricorn への矯正写像が連続でないことも示している．つまり，Mandelbrot 集合の自己相似性は，tricorn の場合には成り立たないということである (雑誌論文 1， および arXiv:1605.08061(投稿中))．これらは tricorn や複素 2 次元以上のパラメータ空間が Mandelbrot 集合よりもずっと複雑であることを示している．
数値的には，奇数周期の双曲成分で tricorn の外から境界の１点に収束する曲線が存在しない(到達不可能な)ものがあることも観察されており，部分的な結果は Mukherjee 氏と

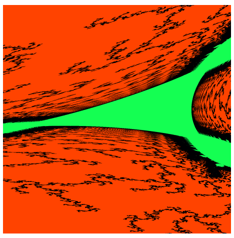

図 3：到達不可能な tricorn の双曲成分．

の研究によって得られており，研究を進めている．
Mandelbrot 集合の双曲成分の境界は全て到達可能であるし，更には Mandelbrot 集合は局所連結であることが予想されており，従って境界の全ての点が到達可能であると考えられている．従ってこのことも Mandelbrot 集合とは大きく異なる性質を示している．

b) 分岐測度の台と Misiurewicz 近似

反正則力学系族は，正則力学系の実解析的な部分族で，特殊な対称性を持つものとみなすことができる．（正則な）多項式族の分岐測度の台は Misiurewicz な多項式の集合の閉包に一致することが知られている．これは臨界点が全て active なパラメータ集合(activity locus)に含まれるが，3 次以上の場合には真部分集合になることが知られている．これは

放物-吸引的周期点を持つものが差集合に入る（Misiurewicz 近似できない）ことがすぐにわかるからであるが，それ以外の例は存在するかどうかも含めて知られていなかった．反正則力学系の族に対しては，放物-吸引的でない例が存在することは，tricorn の主双曲成分（周期が１のもの）の境界を見れば明らかであるが，そのようなパラメータでも，より大きな族である正則力学系（双２次多項式）の族の中では Misiurewicz 近似できるものもある．しかしながら，Mukherjee 氏と共同で，一部のパラメータでは，十分小さな摂動では Julia 集合が連結で無くなる（臨界点の軌道が少なくとも１つ無限遠に発散する）か，吸引的または放物型の不動点を持つ，特に Misiurewicz なものでは近似できないことを示すことに成功した．

c) skew product のファイバーJulia 集合の不連続性
また，2 次元の多項式の skew product で saddle connection を持つもののファイバー方向の Julia 集合が不連続に変化する現象が中根氏によって観察されていた．これらの絵を見ると，1 次元力学系における parabolic implosion と呼ばれる分岐現象に非常によく似ている．parabolic implosion においては力学系や Julia 集合の幾何極限が Lavaurs 写像と呼ばれる写像によって記述される．base 方向の摂動を１次元力学系のパラメータの摂動と同じように捉えることで，Lavaurs 写像に対応するものを定義し，それによってファイバー方向の力学系と Julia 集合の幾何極限を記述した（雑誌論文 2).

d) 複素 2 次元の Julia 集合や分岐測度の分布の可視化
2016 年は，複数のヘッドマウントディスプレイ型の VR 機器が発売された年であり，「VR 元年」と呼ばれる．このようなヘッドマウントディスプレイ型 VR 機器を用いて，複素 2 次元の Julia 集合や分岐測度の分布を可視化するプログラムを作成した．複素 2 次元（実 4 次元）空間内の点集合を，GPU を用いて高速に計算してスクリーンに描画し，それをコントローラを用いて回転や拡大・縮小したり，ユーザが移動したり，のぞきこんだりして観察することもできるようにした．また幅広いカスタマイズ可能であり，実 4 次元から 2 次元のスクリーンにどのように射影するか，それをコントローラの操作や時間変化によってどのように変化させるか，といったことも自由に変更することができる．
4 次元では 2 次元のスクリーンから見て 2 つの「奥行き方向」がある．一方で人間が奥行きを知覚する方法として代表的なものに，両眼視差と運動視差がある．この 2 つの視差を別の「奥行き」に対応させることで，少し 4 次元的な構造が知覚できることがわかった．別の言い方をすると，ユーザや観察対象の移動や回転，または時間変化に応じて 4 次元から 3 次元への射影方法を変えると，両目で見えている 3 次元的な対象が変形して見える．その変形の度合いによって，4 つ目の座標の違いが観察できるのである．どのように運動視差を実装するか，レンダリングの方法，様々な要素が知覚には関わっているので，より良い見せ方について今後研究する必要があるし，チュートリアルなどを作る必要もあると思われる．
また，分岐測度の台は現在でも計算可能なので，局所的に高精度で計算することによって上記 b）の Misiurewicz 近似の結果を可視化することは可能であると考えており，現在開発中である．VR によって新しい現象が発見できたわけではないものの，VR によって複素 2 次元空間内の複雑なフラクタル集合に関する結果をわかりやすく可視化できる最初の例となると期待している．

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 3 件）
1. Hiroyuki Inou. Self-similarity for the tricorn. Exp. Math. 掲載予定. 査読有. DOI: 10.1080/10586458.2017.1420502
2. Hiroyuki Inou, Shizuo Nakane. An implosion arising from saddle connection in 2D complex dynamics. Indiana University Mathematics Journal.掲載予定. 査読有.
3. Hiroyuki Inou, Sabyasachi Mukherjee. Non-landing parameter rays of the multicorns. Invent. Math. 204 (2016) 869-893. 査読有. DOI: 10.1007/s00222-015-0627-3

〔学会発表〕（計 16 件）
1. Hiroyuki Inou. Inaccessibility of hyperbolic components for anti-holomorphic dynamics. On geometric complexity of Julia sets. 2018 年.
2. 稲生 啓行．複素力学系とその可視化．数学ソフトウェアとフリードキュメント 26．2018 年.
3. Hiroyuki Inou. On perturbation of a polynomial with parabolic fixed point. 複素力学系の研究. 2017 年.
4. Hiroyuki Inou. Visualization in complex dynamics. MEIS2017. 2017 年.
5. Hiroyuki Inou. Non-landing parameter rays for the tricorn. PRIMA third congress. 2017 年.
6. 稲生 啓行. On accessibility of hyperbolic components for the tricorn. 複素力学系およびそのモヂュライ等の関連分野の研究. 2016 年.
7. Hiroyuki Inou. On self-similarity in anti-holomorphic dynamics. Conference of

Complex Analysis in China. 2016
8. Hiroyuki Inou. On accessibility of hyperbolic components of the tricorn. Parameter Problems in Analytic Dynamics. 2016年.
9. Hiroyuki Inou. On wiggly features and self-similarity of multicorns. Taking the Measure of One-Dimensional Dynamics. 2016年.
10. 稲生 啓行. Tricorn の双曲成分の正則なパラメータ付けと、それらの共通境界でのふるまいについて. 冬の力学系研究集会. 2016年.
11. 稲生 啓行. Non-landing umbilical cords and discontinuous straightening maps for the tricorn. 複素力学系の深化. 2015年.
12. Hiroyuki Inou. Parabolic implosion in anti-holomorphic family. Perspectives on Parabolic Points in Holomorphic Dynamics. 2015年.
13. Hiroyuki Inou. Wiggly features appearing in anti-holomorphic dynamics. 複素力学系の総合的研究. 2014年
14. Hiroyuki Inou. Wiggles in the anti-holomorphic quadratic family. ICM 2014 satellite conference, Holomorphic Dynamics in One and Several Variables. 2014年.
15. 中根静男・稲生啓行. An implosion arising from saddle connection in 2D complex dynamics. 力学系：理論と応用の相互作用. 2014年.
16. Hiroyuki Inou. Straightening maps and similarity of parameter spaces in complex dynamics. International Conference "Topological and geometric methods in low-dimensional dynamical systems". 2014年.

〔その他〕
ホームページ等
https://www.math.kyoto-u.ac.jp/~inou/

６．研究組織
(1)研究代表者
稲生 啓行（Hiroyuki Inou）
京都大学・大学院理学研究科・講師
研究者番号：00362434