

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 29 年 6 月 13 日現在

機関番号：34315

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2014～2016

課題番号：26400125

研究課題名(和文) C^* -環の包含関係における不変的性質についての研究研究課題名(英文) Study on permanent properties for inclusion of C^* -algebras

研究代表者

大坂 博幸 (Osaka, Hiroyuki)

立命館大学・理工学部・教授

研究者番号：00244286

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,600,000円

研究成果の概要(和文)：照屋氏との共同研究において、単位元のない C^* -環の包含関係におけるロホリン性の定式化を、Pimsner-Popa不等式に関する指数が有限の場合に、Balak-Szaboによる sequentially $*$ -homomorphismを用いておこない、 C^* -環の様々な普遍性質の遺伝性について明らかにした。また、Dey氏、Trivedi氏との共同研究において、Hilbert C^* -module上の上への有限群の作用のロホリン性を定義し、基本的な性質を調べた。

研究成果の概要(英文)：Through the joint work with Prof. Teruya we formulated the Rokhlin property for inclusion of nonunital C^* -algebras with a index finite related to the Pimsner-Popa inequality, using the sequentially $*$ -homomorphism by Balak-Szabo, and we showed the stability for permanence properties for inclusion of C^* -algebras. Also, we defined the Rokhlin property for actions of finite groups on Hilbert C^* -modules, and studied its basic properties.

研究分野：作用素環論

 キーワード：Rokhlin property Cuntz-Pimsner algebras Hilbert C^* -modules Nuclear dimension Self-absorbing Cuntz semigroups

1. 研究開始当初の背景

(1) フォンノイマン環の因子環-部分因子環論の場合、Jones 指数有限 II_1 因子環のペア $M \subset N$ は、超有限性、 Γ 性、 T 性など様々な重要な性質を共有するが、近似的有限次元環 (AF 環) である CAR 環の Z_2 作用で固定環 CAR^{Z_2} が AF 環にならない例があるように、綿谷指数有限なペア $CAR^{Z_2} \subset CAR$ で AF 性を共有しない (遺伝しない) 例がある。これに関して、有限群 G の作用 α が泉の意味で口ホリン性を持つならば、単純 C^* -環 A が AF 性、あるいは、より広く、近似的 $C[0, 1]$ 性 (AI 性) や近似的 $C(S^1)$ 性 (AT 性) を持つならば、その固定環 A^G と C^* -接合積 $C^*(G, A, \alpha)$ が同じ性質を持つことが大坂-Phillips の研究で示されている (Osaka and Phillips, Math. Z 2012)。

(2) C^* -環の包含関係が綿谷指数有限でない整数群 Z による接合積の場合も作用 α の口ホリン性が鍵であり、1998 年に岸本が、ただ一つのトレース的状态 τ を持つ、単純な、AT 環 A において、(i) α が口ホリン性を持つ、(ii) 0 でない m に対して α^m が一様外部性を持つ、(iii) α が GNS 表現環 $\pi_\tau(A)$ の弱閉状に非周期な自己同型写像として拡張できる、(iv) 接合積 $C^*(Z, A, \alpha)$ がただ一つのトレース的状态を持つ、(v) $C^*(Z, A, \alpha)$ が実階数 0 をもつが同値であることを示している。特に、 α が近似的内部性を持つとき、上の条件と (vi) $C^*(Z, A, \alpha)$ が実階数 0 である AT 環になることが同値になる。これらの結果を、実階数 0 をもつ AT 環を含む、Lin の意味でトレースランクゼロを持つクラスの中で、ただ一つのトレース的状态 τ を持つ、単純な C^* -環 A 上の自己同型写像が、口ホリン性より弱いトレース的口ホリン性をもつ場合に拡張できた (Osaka and Phillips, Ergod. Th. Dynamics. Sys. 2006)。最近では、松井-佐藤により口ホリン性より弱い様々な外部性自己同型写像について調べられており、単純 C^* -環の分類理論に活用されている。

(3) より一般的な C^* -環の包含関係 $P \subset A$ を解析するために、綿谷の意味で有限である条件付き期待値 $E: A \rightarrow P$ に対して口ホリン性を定義し、大坂-Phillips の結果を拡張することができた (Osaka et al. Contemporary Math. 2009)。ちなみに、有限群 G から単純 C^* -環 A への作用 $\alpha: G \rightarrow \text{Aut}(A)$ の場合、 $E: A \rightarrow A^G$ が口ホリン性を持つことと泉の意味で作用 α が口ホリン性を持つことは同値である。この方法を推し進め、単純 C^* -環の分類で非常に重要な性質である、Jiang-Su 環安定性、分解ランク有限性、核型次元有限性、Cuntz 半群の強比較性の遺伝性について明らかにした (Osaka and Teruya, Trans. Amer. Math. 2014) (Osaka and Teruya, Advance in Operator Theory に掲載予定)。

本研究計画は、Phillips、松井-佐藤らよ

り定義された、離散群 Γ 上の口ホリン性より弱い外部性をもつ作用の性質と自然な条件付き期待値 $E: A \rightarrow A^\Gamma$ (あるいは、 $E: C^*(\Gamma, A, \alpha) \rightarrow A$) の関係を明確にし、より一般的な C^* -環の包含関係 $P \subset A$ 上に定式化し、Jiang-Su 環安定性、分解ランク有限性、核型次元有限性、Cuntz 半群の強比較性等の遺伝性について明らかにする基盤研究である。

2. 研究の目的

上記の研究背景およびこれまでの研究成果を下に、本研究は C^* -環の包含関係 $P \subset A$ における条件付き期待値 $E: A \rightarrow P$ への様々な条件を検討し、 C^* -接合積の分類に展開するための基盤となる研究を行う。具体的には以下のことを明らかにする。

(1) A が単純 AF 環、 $P \subset A$ が綿谷指数有限であるならば、 P の安定階数はいつでも 1 であることを示す (つまり、任意の元 $a \in P$ が P に属する逆作用素で近似できることを示す)。これは Blackadar により 1988 年に提示された問題であるが、 P の安定階数が 2 以下であることは大坂より示されている (Intern. J. Math. 2008)。

(2) Phillips の意味でのトレース的口ホリン性に対応する条件を $P \subset A$ 上に定式化し、 A が Jiang-Su 環安定性、分解ランク有限性、核型次元有限性、Cuntz 半群の強比較性のいずれかの性質を持つとき、 P が同じ性質を持つかどうか明らかにする。

(3) 射影作用素を用いず、正值作用素を用いて定義されている有限群 G 上の様々なタイプの口ホリン作用を綿谷指数有限な C^* -包含関係 $P \subset A$ 上に定式化することを試みる。

(4) Jiang-Su 安定である単純 C^* -環 A において、射影作用素を用いず、正值作用素を用いて定義されている整数群 Z 上の様々なタイプの口ホリン性を持つ自己同型写像 α を考えると、その接合積 $C^*(Z, A, \alpha)$ が Jiang-Su 環安定になるかどうか解析する。

(5) 従順離散群 Γ からの様々なタイプの口ホリン作用 α から導かれる接合積 $C^*(\Gamma, A, \alpha)$ における Jiang-Su 環安定性の解明と一般の C^* -包含関係 $P \subset A$ 上への定式化を試みる。

(6) 実数群 R からの口ホリン作用 (フロー) における岸本の仕事を見直し、 $C^*(R, A, \alpha)$ における Jiang-Su 環安定性の解明と C^* -包含関係 $P \subset A$ 上への一般化を試みる

3. 研究の方法

(1) 綿谷指数有限な C^* -環包含関係 $P \subset A$ における安定階数の評価の決定 (大坂が担当)
 C^* -環 A の安定階数が 1 であるとは、 A の

任意の元が A に属する逆作用素で近似できることをいう。綿谷指数有限の下で、この性質の P への遺伝性を解明する。

A が AF 環であるときの決定

大坂の研究 (Intern. J. Math. 2008) で、 A が単純であるとき、 P の安定階数は 2 以下であることが示されている。この単純性を外した場合、安定階数 2 以上を持つ P が構成できるかどうか調べる。

A が安定階数 1 をもつ一般の単純 C^* -環であるときの解析

$C[0, 1] \otimes CAR$ は、単純環でなく、かつ、安定階数 1 であるが、その固定環 $(C[0, 1] \otimes CAR)^{Z_2}$ で安定階数 2 を持つ部分環が存在する。この例を用いて、帰納的極限等を考えて、単純 C^* -環で安定階数 1 を持つが、その固定環が安定階数 2 以上を持つ例が構成できるか試みる。その一方で、 A が単純 C^* -環で安定階数 1 を持つとき、 C^* -環包含関係 $P \subset A$ の P が安定階数 1 を持つことを、大坂のメソッドを発展させ直接証明することを試みる。

(2) Phillips の意味でのトレース的口ホリン性に対応する条件の C^* -環包含関係 $P \subset A$ への定式化 (大坂、照屋が担当)

口ホリン射影作用素の関係式の検討

小高・大坂・照屋 (Osaka et al. Contemporary Math. 2009) により、 $P \subset A$ 上の口ホリン性が定義されたが、そこで用いられた口ホリン射影作用素に対応する射影作用素の関係式を、トレース的口ホリン性の作用の性質をながめながら定式化を試みる。

埋め込み表現 $A^\infty \hookrightarrow P^\infty$ の構成

口ホリン性の場合と同様に、 A の性質を P に遺伝することを示すためには、適切な埋め込み表現 $A^\infty \hookrightarrow P^\infty$ が重要な役割をする。その構成を、口ホリン性の場合と同様に試みる。

不変性の遺伝についての解析

において埋め込み表現の構成が成功した場合、この埋め込み表現を用いて、 A の Jiang-Su 環安定性、分解ランク有限性、核型次元有限性、Cuntz 半群の強比較性が、 P に遺伝するかどうか解明する。表現の構成がうまくいかない場合は、(3) の埋め込み写像の構成を試みる。

(3) 射影作用素を用いない口ホリン性に対応する条件の C^* -環包含関係 $P \subset A$ への定式化 (大坂、照屋が担当)

$A' \cap A^\infty$ を用いての定式化

泉が行ったように、有限群 G からの作用の口ホリン性を $A' \cap A^\infty$ を用いて定式化をする。

C^* -環包含関係 $P \subset A$ への定式化

における特徴付けと同値な条件を、自然な条件付き期待値 $E: A \rightarrow A^G$ に設定す

る。従来の口ホリン射影作用素に対応する口ホリン正值作用素を定式化すれば良いと予想されるが、1 の分解に対応する口ホリン正值作用素のタワーを E を用いて定式化するのは今のところ困難である。ホップ代数からの解析

C^* -環包含関係の具体例であるホップ代数における口ホリン性を持つ作用の定式化を試み、一般の C^* -環包含関係への定式化を予想する。

埋め込み写像 $A^\infty \hookrightarrow P^\infty$ の構成

従来の口ホリン性と異なり埋め込み表現 $A^\infty \hookrightarrow P^\infty$ を構成するのは困難であると予想される。近似的に表現になる完全正值写像のネットが構成できるのではと期待している。

4. 研究成果

(1) 照屋氏との共同研究において、Phillips 氏の意味でのトレース的口ホリン性に対応する条件を C^* -包含関係 $P \subset A$ において定義し、 A が Jiang-Su 環安定性、Cuntz 半群の教比較性のいずれかの性質を持つとき、 P が同じ性質を持つことを明らかにした。

(2) 照屋氏との共同研究において、単位元のない C^* -環の包含関係における口ホリン性を、Pimsner-Popa 不等式に関する指数が有限の場合に定式化し、与えられた C^* -環の multiplier 環を考えることにより、単位元のある場合と同じく、様々な性質 (実階数 0、安定階数 1、低次元トレースランク、核型次元、Jiang-Su 吸収性など) が保存されることが証明できた。

(3) Santanu Dey 氏、Harsh Trivedi 氏との共同研究において C^* -correspondence、および、Hilbert C^* -bimodule 上への有限群の作用の口ホリン性を定義し、基本的な性質を調べた。有限群からの C^* -接合積において不変な C^* -環上の重要な性質が、 C^* -correspondence から生成される C^* -環においても不変であることが主な結果である。Hilbert C^* - A -module においては、有限群の作用が口ホリン性を持つ場合は、 C^* -環上の性質が、それに付随する linking 環に遺伝することがわかった。

(4) 照屋氏との共同研究において、指数有限な単位元を持つ C^* -包含関係における条件付き期待値の口ホリン性とその Basic construction における双条件付き期待値の近似ユニタリ表現性が同値であることを示し、可換有限群における泉氏による考察の一般化に成功した。この考察により指数有限でない単位元を持つ C^* -包含関係における口ホリン性の定式化の方向性が見えてきた。

(5) Balak-Szabo による sequentially split*-homomorphisms を用いて、単位元を持

たない一般の場合の指数有限な C^* -包含関係における口ホリン性の定式化を試み、有限群の場合の一般化された口ホリン性を持つ作用の一般化に成功した。これは、上記(2)における照屋氏との共同研究において定式化した指数有限な C^* -包含関係における口ホリン性を含む形で一般化されている。これにより、様々な性質が指数有限な C^* -包含関係が一般化された口ホリン性を持つ場合、大きい C^* -環から小さい C^* -環に遺伝することが明らかになった。

5. 主な発表論文等

[雑誌論文](計8件)

著者名: H.Osaka and T.Teruya, 論文標題: Permanence of nuclear dimension for inclusions of unital C^* -algebras with the Rokhlin property, 雑誌名: Advance in Operator Theory, 査読: 有, 発行年: 2018 掲載決定, ページ: 掲載決定 /10.22034/aot.1703-1145

著者名: H.Osaka and S.Wada, 論文標題: Unexpected relations which characterize operator means, 雑誌名: Proceedings of the American Mathematical Society, Series B, 査読: 有, 巻: 3, 発行年: 2016, ページ: 9-17

著者名: H.Osaka, 論文標題: Matrix monotone functions and the generalized Powers-Størmer inequality, 雑誌名: Ordered Structure and Applications: Positivity VII Trends in Mathematics, 査読: 有, 発行年: 2016, ページ: 349-361/10.1007/978-3-319-27842-1_22

著者名: D. T. Hoa, T. B. Khue, and H.Osaka, 論文標題: The generalized reverse Cauchy inequality, 雑誌名: Linear and Multilinear Algebras, 査読: 有, 巻: 64, 発行年: 2016, ページ: 1415-1423/10.1080/03081087.2015.1087459

著者名: D.T.Hoa, H.Osaka, and J.Tomiyama, 論文標題: Characterization of operator monotone functions by Powers-Størmer type inequalities, 雑誌名: Linear and Multilinear Algebras, 査読: 有, 巻: 63, 発行年: 2015, ページ: 1577-1589

著者名: D. T. Hoa, T. M. Ho, and H. Osaka, 論文標題: Interpolation classes and matrix means, 雑誌名: Banach J. Math. Anal., 査読: 有, 巻: 9, 発行年: 2015, ページ: 140-152

著者名: D.T.Hoa and H.Osaka, 論文標題: Inequalities for interpolation functions, 雑誌名: Banach J. Math. Anal., 査読: 有, 巻: 9, 発行年: 2015, ページ: 67-74

著者名: H.Osaka and T.Teruya, 論文標

題: Strongly self-absorbing property for inclusions of C^* -algebras with a finite Watatani index, 雑誌名: Trans. Amer. Math. Soc., 査読: 有, 巻: 366, 発行年: 2014, ページ: 1685-1702

[学会発表](計16件)

発表者名: H.Osaka, 発表課題: Matrix functions, matrix means, matrix inequalities, 学会名等: Recent advances in Operator Theory and Operator Algebras 2016(招待講演)(国際学会), 発表年月日: 2016年12月19日, 発表場所: (インド)バンガロール

発表者名: H.Osaka, Y.Tsurumi, and S.Wada, 発表課題: Generalized reverse Cauchy inequality and applications to operator means, 学会名等: 日本数学会 2016年度秋期総合分科会, 発表年月日: 2016年09月16日, 発表場所: (東京八王子市)首都大学

発表者名: H.Osaka, 発表課題: The Rokhlin property for group actions on Hilbert C^* -modules, 学会名等: Recent development in Operator Algebras (招待講演)(国際学会), 発表年月日: 2016年09月12日, 発表場所: (京都府京都市)京都大学数理解析研究所

発表者名: H.Osaka, 発表課題: Some operator Inequalities which characterize operator means, 学会名等: ILAS2016 (招待講演)(国際学会), 発表年月日: 2016年07月15日, 発表場所: (ベルギー)ルーベン

発表者名: H.Osaka, 発表課題: Tracial approximation for inclusions of unital C^* -algebras, 学会名等: International conference on structure of C^* -algebras and tracial approximation (招待講演)(国際学会), 発表年月日: 2016年07月07日, 発表場所: (中国)Shijiazhuang

発表者名: H.Osaka, 発表課題: Generalized reverse Cauchy inequality and applications to operator means, 学会名等: KOTAC 2016 (招待講演)(国際学会), 発表年月日: 2016年06月21日, 発表場所: (韓国)ソウル

発表者名: H.Osaka, 発表課題: The Rokhlin property for group actions on Hilbert C^* -modules, 学会名等: Special week on Operator Algebras in June 2016 (招待講演)(国際学会), 発表年月日: 2016年06月07日, 発表場所: (中国)上海

発表者名: H.Osaka, 発表課題: Symmetric operator monotone functions and operator means, 学会名等: 作用素論・作用素環論研究集会 (招待講演), 発表年月日: 2015年10月25日, 発表場所: (新潟県妙高市)KKR 妙高高原白樺荘

発表者名 : H.Osaka, Y.Tsurumi, S.Wada,
発表課題 : Some operator inequalities
which characterize operator means, 学
会名等 : 日本数学会 2015 年秋期総合分科
会, 発表年月日 : 2015 年 09 月 15 日, 発
表場所 : (京都府京都市)京都産業大学
発表者名 : H.Osaka, 発表課題 : Some
operator inequalities which
characterize operator means, 学会名
等 : Workshop on Quantum information
theory and related topics (招待講
演)(国際学会), 発表年月日 : 2015 年 09
月 01 日, 発表場所 : (ベトナム)ハノイ
発表者名 : H.Osaka, 発表課題 : The
Rokhlin property for an inclusion of
 C^* -algebras, 学会名等 : Special week on
Operator Algebras (招待講演)(国際学
会), 発表年月日 : 2015 年 06 月 03 日, 発
表場所 : (中国)上海
発表者名 : H.Osaka, 発表課題 : Gaps
problem of matrix monotone functions
and matrix convex functions and their
applications, 学会名等 : 日本数学会
2015 年度春期総合分科会 (招待講演),
発表年月日 : 2015 年 03 月 22 日, 発表場
所 : (東京都千代田区)明治大学
発表者名 : H.Osaka, 発表課題 : 非対称
な作用素平均について, 学会名等 : 関数
解析学の研究とその応用, 発表年月日 :
2015 年 01 月 30 日, 発表場所 : (新潟県
新潟市)新潟大学
発表者名 : H.Osaka, 発表課題 :
Self-adjointness and symmetricity of
operator means, 学会名等 : 作用素の平
均とその関連 (招待講演), 発表年月
日 : 2014 年 11 月 28 日, 発表場所 : (京
都府京都市)京都大学数理解析研究所
発表者名 : H.Osaka, 発表課題 : The
Jiang-Su absorption for inclusions of
unital C^* -algebras, 学会名等 : 日本数
学会 2014 年度秋期総合分科会, 発表年
月日 : 2014 年 09 月 27 日, 発表場所 : (広
島県東広島市)広島大学
発表者名 : H.Osaka, 発表課題 : The
Jiang-Su absorption for inclusions of
unital C^* -algebras, 学会名等 : ICM
Satellite Conference on Operator
Algebras and Applications(国際学会),
発表年月日 : 2014 年 08 月 09 日, 発表場
所 : (韓国)ソウル

〔その他〕

ホームページ等 :

<http://www.ritsumei.ac.jp/se/~osaka/>

6. 研究組織

(1)研究代表者

大坂 博幸 (OSAKA HIROYUKI)

立命館大学・理工学部・教授

研究者番号 : 00244286

(2)連携研究者

照屋 保 (TERUYA TAMOTSU)

群馬大学・教育学部・教授

研究者番号 : 30594246