様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２９ 年　 ６ 月　 ５ 日現在

機関番号：３４５０４
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2014～2016
課題番号：２６４００１２８

研究課題名（和文）KdV力学系の極限集合の研究

研究課題名（英文）Study on limit set of KdV flow

研究代表者

小谷　眞一（Kotani, Shinichi）

関西学院大学・特定プロジェクト研究センター・客員研究員

研究者番号：１００２５４６３

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　1,400,000円

研究成果の概要（和文）：浅水波を記述するKdV方程式は，シュレディンガー作用素のスペクトル（固有値）との関連が発見されて以来，代数，解析，幾何の分野で代表的な可積分系として研究されてきた．本研究の目標は，代数的な理論である佐藤理論をシュレーディンガー作用素のスペクトルの視点から見直し，可能な限りの一般的な初期値から出発するKdV方程式の解を構成することである．このために佐藤理論で本質的なタウ関数をシュレーディンガー作用素のWeyl関数で表現することを試み成功した．これにより非常に一般的な初期値（非減衰）から出発するKdV方程式の解を構成することができる．

研究成果の概要（英文）：Since the discovery of the deep connection between the KdV equation describing the dynamics of shallow water wave and the spectrum (eigenvalue) of 1d Schroedinger operator, the KdV equation has been studied in algebra, analysis and geometry as a typical completely integrable system. In this program we take a look of algebraic Sato's theory from the point of spectral theory of Schroedinger operators, and try to construct a solution to the KdV equation starting from a general initial data. To this end we could succeed to obtain an expression of the tau-function by the Weyl function for 1d Schroedinger operator. The tau-function is the key object in Sato's theory. This expression made it possible to give a general solution to the KdV equation.

研究分野： スペクトル理論，確率論

キーワード： シュレーデインガー作用素　KdV方程式　スペクトル　力学系　Toeplitz作用素　Weyl関数

１．研究開始当初の背景

KdV 方程式は浅水波を記述する方程式として１９世紀に発見された非線形偏微分方程式である．この解法についてはいくつかの特殊解が知られていたが，1960 年代に１次元シュレーディンガー作用素のスペクトル（固有値）と関連することが発見され，以後，類似の非線形偏微分方程式を含めた完全可積分系として数学の広い分野で研究が進んだ．

一方，１次元シュレーディンガー作用素のスペクトルについてはポテンシャルが減衰する場合，および周期的な場合には多くの結果が知られていたが，近年，物理学的な動機により，エルゴード的なポテンシャルを持つ１次元シュレーディンガー作用素のスペクトルの研究が進んだ．実際，Avila は準周期的な場合に懸案の問題を完全に解き，2014 年のフィールズ賞を受賞している．

KdV 方程式で，初期関数が減衰もしなくかつ周期的でもない場合として，準周期的な場合とランダムな場合があるが，やはり物理学の観点から，そのような場合に KdV 方程式の解の構成の可能性と時間無限大での解の挙動に関心がもたれている．したがって，シュレーディンガー作用素のスペクトルの研究と KdV 方程式とを関連付けて研究を進めることが重要である．

これまでの解法は

(１)適当な関数空間を設定し，関数解析的なアプローチをとる方法
(２)減衰するポテンシャルに逆散乱法を適用する方法
(３)有限帯スペクトルを持つ場合に代数関数を使い具体的に解を表現する方法

が主なものであった．しかし，KdV 方程式は対応するシュレーディンガー作用素のスペクトルを保存するにも関わらず，スペクトルと関連させて解法が研究されては来なかった．本研究ではこの点に着目している．

２．研究の目的

この研究の目的は，非減衰の初期関数から出発する KdV 方程式の解を構成し，その解の時間無限大での漸近的な性質を考察し，物理学に新しい見地を与えることである．さらに，従来代数的に研究されてきた成果を解析学の立場から見直し，可積分系の分野により強固な数学的基盤を与えたい．

この目的を達成するために２つの目標を設定した．

（１）シュレーディンガー作用素のスペクトルが KdV 方程式の下で不変であることが 1960 年代の大発見であった．このことと，シュレーディンガー作用素のスペクトルからポテンシャルを構成するというスペクトル逆問題を通じて KdV 方程式を解くというのが現在までの主流であるが，従来の方法では，初期関数が減衰する場合か周期的な場合しか扱われなかった．本研究では概周期的な初期関数を含むより広範囲の初期関数に対して KdV 方程式を解く方法を見つけることが目標である．

（２）さらに，シュレーディンガー作用素の絶対連続スペクトルとポテンシャルの無反射性の関連についての Remling の定理は，絶対連続スペクトルと KdV 方程式の時間無限大での挙動と関連すると予想できるので，絶対連続スペクトルと KdV 方程式の関連についての解明も目標である．

３．研究の方法

KdV 方程式は，関数空間を設定して関数解析的手法で解く方法と，1950 年代に旧ソ連邦で研究された逆スペクトル問題を経由して解く方法が主なものであった．しかし，これらの方法では，非減衰の初期関数は，周期的な場合しか扱うことが出来ない．また，準周期的な場合にはスペクトルの研究が進んだとは言え，扱えるクラスは非常に限定的である．

第３の方法として，1980 年代初頭に発見された佐藤のグラスマン多様体の方法がある．この方法は代数関係の研究者により一般化され研究されてきたが，KdV 方程式のすべての解がこの方法で求まるかは非自明である．本研究ではこの佐藤の方法をシュレーディンガー作用素のスペクトルの視点から見直し，より一般の非減衰解を求めるという方法を試みた．鍵になる概念は 1920 年代に導入された Weyl 関数である．Weyl 関数はすべてのポテンシャルを持つ１次元シュレーディンガー作用素に対して定義化のであり，ここ３０年，エルゴード的なポテンシャルを持つシュレーディンガー作用素のスペクトルの研究において中心的な役割を演じてきており，ますますその重要性が認識されている．

４．研究成果

（１）佐藤のタウ関数の表現式をシュレーディンガー作用素の Weyl 関数と関連付けることに成功し，無反射性を持たないより一般の初期関数に対しても KdV 方程式の解を構成することが可能になった．それにはかなり一般の準周期的な初期関数も含まれる．この方法により，将来さらに一般の初期関数について KdV 方程式の解を構成することが可能になると思われる．

具体的には次の結果を得た．
ポテンシャル $q(x)$を持つシュレーディンガー作用素を $H(q)$とし，その Weyl 関数を $m_{\pm}$ とするとき，新しい関数 m を

Rez>0 では　$m(z)=-m_{+}(-z^2)$,
Rez<0 では　$m(z)=m_{-}(z^2)$

と定める．

ここで m はある $r>0$ に対して領域 $C\backslash([-r,r]\cup i[-r,r])$ で正則とする．これは $H(q)$ が区間 $[\sqrt{r},\infty)$ で無反射であり，$\mathrm{sp}H(q)\subset[-\sqrt{r},\infty)$ となることと同値である．m に働く群として $\Gamma=\left\{g=e^h;\ h \text{ は実多項式}\right\}$ とし，

$$M_g(z,\xi)=\frac{g_o^{-1}(z)(gm)_e(\xi)+g_e^{-1}(z)(gm)_o(\xi)-m_o(\xi)}{\xi-z}$$

と置く．ここで $f_e(z)$ は $f(z)$ の偶関数部分，$f_o(z)$ は機関数部分である．区間 $[-\sqrt{r},\sqrt{r}]$ を囲む単純閉曲線 C に対して，$L^2(C)$ 上の積分作用素を

$$(K_g u)(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{m_o(\eta)^{-1}}{\eta-z}d\eta\frac{1}{2\pi i}\int_C M_g(\eta,\xi)u(\xi)d\xi$$

で定めると，佐藤の τ-関数は

$$\tau_m(g)=\det(I+K_g)$$

と表現できることがわかった．さらに $\tau_m(g)>0$ となり，KdV 力学系は

$$(K(g)q)(x)=-2\partial_x^2\log\tau_m(e_x g),\text{ ここで }e_x(z)=e^{xz}\in\Gamma$$

と定義され，特に $q(x)=(K(1)q)(x)=-2\partial_x^2\log\tau_m(e_x)$, また $g=e^{4tz^3}$ に対しては $K(g)q$ が KdV 方程式の解を与える．τ-関数のこの表示は曲線を ∞ にまで適当に延長していけば m に対する正則性の条件を外すことが出来るという点で重要である．

タウ関数のこの表示により，まず従来の減衰する初期値解が得られる．従来は散乱データより逆スペクトル問題を通じてポテンシャルを得るという手続きで KdV 方程式の解が得られていたが，今回の方法ではより直接的に得られることになる．

従来の方法では可能でなかったエルゴード的な初期関数に対する解も得られることがわかった．つまり

「エルゴード的な初期関数をポテンシャルに持つシュレーディンガー作用素のスペクトルが絶対連続部分を持ち，正の領域では絶対連続スペクトル以外の部分の Lebesgue 測度が有限であるという条件を満たせば，KdV 方程式の解が得られる」

ことを示すことが出来た．エルゴード的な初期関数には概周期的なものも代表的な例として含まれる．これまでにも概周期的な初期関数から出発する解の構成についていくつかの結果があったが，概周期的なポテンシャルについての逆スペクトル問題を利用する方法のために扱える初期関数が非常に限定的であった．今回の我々の方法は逆スペクトル問題を回避することに成功しているので，より一般の概周期的な初期関数から出発する解の構成が可能になった．

結果として，今回の方法は既存の結果を統一した形で含み，さらに今まで不可能であったクラスの解を構成したことになる．

しかしながらいくつかの重要な問題が未解決として残っている．一つは，概周期的な初期関数から出発した場合に，解が時間と空間について概周期的になるかという問題である．今までの例ではすべてそのようになっているが，今回の解はより一般的であるので証明が必要である．おそらくこの予想は正しいと思われるが，証明には新しいアイデアが必要である．これには初期関数を規定する不変測度が，KdV 力学系により変換された場合にどのように変化するかについて調べる必要がある．つまり，KdV 力学系のエルゴード理論の視点からの研究が求めれれる．

２つ目の問題として，スペクトルが絶対連続部分を持たない場合の解の構成の問題がある．代表的にはマルコフ過程を初期関数とする場合であるが，対応するシュレーディンガー作用素のスペクトルは純点スペクトルでしかも半区間で稠密になる．このような場合の KdV 方程式の解の構成は非常に興味ある数学的問題である．この場合でも今回の方法が使える可能性がある．そのためにはスペクトルに付随する Weyl 関数のより詳細な研究が必要であり，確率論，スペクトル論，可積分系理論に新しい問題を提供する．

３つ目の問題としては KdV 方程式の近縁である他の完全可積分系にこの方法を適用する問題がある．例として，戸田方程式，非線形シュレーディンガー方程式がある．これらの非線形可積分系に対してもこの方法が有効であると思われる．

（２）KdV 方程式の解の時間無限大での挙動については初期関数が減衰する場合に逆スペクトル問題により KdV 方程式の解を構成し，解析することによりソリトン解に漸近することが知られている．この場合実軸の正の部分ではスペクトルは絶対連続になっている．これを一般化して，初期関数をポテンシャルに持つシュレーディンガー作用素のスペクトルの絶対連続部分では，KdV 方程式の解は時間無限大で無反射になることが予想される．実際，KdV 可積分系での第１次方程式の解はシフトで表されるが，この場合初期関数の絶対連続スペクトル部分では，シフトで移していった場合の極限関数は無反射性をもつことが Remling により示されている．高次の KdV 方程式系に対してのこの性質は，しかし，絶対連続スペクトルの部分領域でしか示すことが出来なかった．絶対連続スペクトル全領域での無反射性の予想は否定はされていないので，将来の問題として解明していきたい．

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　3　件）

1.Y.Kasahara,<u>S.Kotani</u>: Tauberian theorem for harmonic mean of Stieltjes transforms and its applications to linear diffusions, Osaka Journal of Math. 53(2016), 221-249（査読あり）

2. Y.Kasahara, S.Kotani: Diffusions with Bessel-like drifts,
Kyoto Journal of Math., 55(2015), 773-797（査読あり）

3. S.Kotani, F.Nakano: Level statistics of one-dimensional Schroedinger operators with random decaying potentials,
Interdisciplinary Mathematical Sciences, 17(2014), 343-373（査読あり）

〔学会発表〕（計 12 件）
1. 小谷眞一: Spectrum and capacity,
ランダム作用素のスペクトルと関連する話題,
慶応大学（神奈川県，横浜市），2016 年 12 月 10 日

２．S.Kotani: Construction of KdV flow,
Autum School and Workshop on Discrete Schroedinger operators and quasi-periodic systems,
清華大学，北京市（中国），2016 年 11 月 1５日

３．S.Kotani: Level statistics of eigenvalues for 1D random Schroedinger operators,
12th workshop on Markov processes and related topics,
江蘇師範大学，徐州市（中国），2016 年７月 14 日

4. S.Kotani: Use of Floquet exponent in spectral theory of ergodic Jacobi matrices emphasis on potential theory,
清華大学数学教室セミナー，北京市（中国）2016 年 7 月 4 日

5. S.Kotani: Construction of KdV flow by Schroedinger spectrum,
偏微分方程式姫路研究集会，イーグレ姫路，（兵庫県，姫路市）2016 年 3 月 3 日

6. S.Kotani: Level statistics of eigenvalues for 1D Schroedinger operators with random decaying potentials,
Mathematical Physics Day in Hagen 2016, Fernuniversity in Hagen, ハーゲン市（ドイツ），2016 年 5 月 18 日

7. 小谷眞一: 1D シュレーディンガー作用素の絶対連続スペクトルの Remling の定理をめぐって,
作用素論セミナー，京都大学（京都府，京都市），2016 年 4 月 15 日

8. S.Kotani: Transformation of Herglotz functions and KdV equation II,
ランダム作用素のスペクトルと関連する話題,
慶応大学（神奈川県，横浜市）2015 年 12 月 11 日

9. S.Kotani: Spectral problems of ergodic Schrödinger operators - Their probabilistic aspects-
北京師範大学数学セミナー，北京市（中国）2015 年 9 月 7, 8 日

10. S.Kotani: Invariance of IDS under Darboux transformation and its application,
Random and other ergodic problems,
Newton Institute of Mathematical Sciences,
ケンブリッジ（英国）2015 年 6 月 24 日

11. 小谷眞一: Transformation of Herglotz functions and KdV equation,
ランダム作用素のスペクトルと関連する話題,
京都大学（京都府，京都市）2015 年 1 月 8 日

12. S. Kotani: Study of limiting behavior of solutions to KdV equation by spectrum of associated Schroedinger operators,
International Conference on Stochastic Processes, Analysis and Mathematical Physics,
関西大学（大阪府，吹田市）2014 年 8 月 28 日

〔図書〕（計 0 件）

〔産業財産権〕
○出願状況（計 0 件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

○取得状況（計 0 件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等
http://www.eonet.ne.jp/~kotani/sanpo.html

６．研究組織

(1)研究代表者

小谷　眞一　（KOTANI Shinichi）

所属：関西学院大学理工学部数理科学研究センター

職名：客員研究員

研究者番号：10025463

(2)研究分担者

千代延　大造　（CHIYONOBU Taizo）

所属：関西学院大学理工学部

職名：教授

研究者番号： 50197638