

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 29 年 5 月 31 日現在

機関番号：15301

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2014～2016

課題番号：26400135

研究課題名(和文) 対称マルコフ過程の経路解析とディリクレ形式

研究課題名(英文) Sample path analysis for symmetric Markov processes and Dirichlet forms

研究代表者

塩沢 裕一 (Shiozawa, Yuichi)

岡山大学・自然科学研究科・准教授

研究者番号：60454518

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,200,000円

研究成果の概要(和文)：正則ディリクレ形式から生成される対称マルコフ過程の経路解析を行った。まず、粒子が無限遠点に逃げる速さ(脱出レートの下限)について、体積増大度および熱核に関する条件の下で評価を与えた。さらに、この評価に現れる積分式が、脱出レートの下限に関する末尾確率の退化率を表すことを示した。次に、双曲空間上のブラウン運動の脱出レートを決定した。最後に、ユークリッド空間上の分枝ブラウン運動について、適切な仮定の下で、あるシュレディンガー型作用素の最小固有値から拡散度が定まることを示した。

研究成果の概要(英文)：We developed the sample path analysis for symmetric Markov processes generated by regular Dirichlet forms. We first gave estimates on the speed of particles escaping to infinity (lower escape rate) under the condition on the volume growth or heat kernel. We further proved that some integral in the estimates above expresses the decay rate of some tail probability related to the lower escape rate. We next determined the escape rate of the Brownian motions on hyperbolic spaces. We finally proved that for branching Brownian motions on the Euclidean space, the spread rate is determined by the principal eigenvalue of some Schrödinger type operator under some suitable condition.

研究分野：確率過程論

キーワード：対称マルコフ過程 ディリクレ形式 レート関数 保存性 非再帰性 分枝ブラウン運動

1. 研究開始当初の背景

確率過程とは、空間内をでたらめに運動する粒子のモデル化である。その中でも、現在の情報が分かっているとき、過去と未来は独立であるという性質（マルコフ性）を持つものをマルコフ過程という。マルコフ過程は基本的な確率過程のクラスの1つである。この経路の性質を調べることは、でたらめさの積み重なりを解析することに相当し、興味深い問題である。

（対称）マルコフ過程を構成する方法の1つとしてディリクレ形式の理論がある。ディリクレ形式は自乗可積分な関数空間上の、マルコフ性を持つ閉2次形式として定義され、緩やかな条件下で対称マルコフ過程を構成できる。しかし、ディリクレ形式の持つ解析的情報と、対応する対称マルコフ過程の経路の性質との関係は一般には非自明である。対称拡散過程（経路が連続な対称マルコフ過程）については、経路の大域的性質が詳しく調べられており、特にディリクレ形式の持つ情報（内在的距離や対称化測度の体積増大度）との関係について深い考察が成されている。一方で、数学的興味や、数理ファイナンスなどの応用面からの要請もあり、近年では、経路が不連続な対称マルコフ過程の解析（熱核評価など）が進んでいる。

代表者は、対称マルコフ過程に対して、経路が不連続な場合も込めた形で経路解析を展開することに興味がある。これまでには、保存性およびその定量的性質（粒子がどの程度まで遠方に動くことができるのか）の解析に取り組んできた。

2. 研究の目的

本研究の当初の目的は、代表者のこれまでの研究を推し進め、ディリクレ形式から生成される対称マルコフ過程の経路解析を展開することであった。特に、経路が不連続な対称マルコフ過程の経路の性質と、対応するディリクレ形式の持つ解析的情報との関係を明らかにすることを目指した。

3. 研究の方法

本研究では、内部消滅を持たない対称マルコフ過程の非再帰性に着目し、その定量的特徴づけ（粒子が無限遠点に逃げる速さ）に関する研究を行う。

- (1) 非局所的な正則ディリクレ形式から生成される対称マルコフ過程について、粒子が無限遠点に逃げる速さ、いわゆる脱出レートの下限を調べる。特に、最も緩やかな条件である、対称化測度の体積増大度や、熱核評価を通じた速さの評価について調べる。

- (2) 粒子が無限遠点に逃げるとき、出発点に（相対的に）近い集合に戻る確率は小さくなる。この確率の評価について考察する。このことは、生起確率が非常に小さい現象を解析することに当たり、粒子の挙動をより精密に解析する点で興味深い。

- (3) 対称拡散過程について、対称化測度が超多項式的な場合、粒子がどの程度まで遠方に移動できるのかという、いわゆる脱出レートの上限の評価が得られている。しかし、この評価が精密か否かについて、また脱出レートの下限に対する評価は知られていないようである。双曲空間は、体積増大度が指数的である空間の典型例である。そこで、双曲空間上のブラウン運動の脱出レートの高精度な評価を調べる。

4. 研究成果

- (1) 正則ディリクレ形式から生成される対称マルコフ過程に対して、対称化測度の体積増大度を用いて、脱出レートの下限の評価を与えた。また、ブラウン運動や対称安定型過程の時間変更過程を用いて、爆発が起こるぎりぎりの状況下で、脱出レートの上下評価が分かる興味深い例を構成した。飛躍型対称マルコフ過程に対して、飛躍核の上下評価の下では、熱核評価など大域的性質に関する詳細な結果が得られている。それとは対照的に、本成果は、ディリクレ形式に対する緩やかな状況下で適用可能である。

- (2) [Jian Wang 氏との共同研究] 対称マルコフ過程の熱核評価に関する仮定の下で、脱出レートの上下限に対する精密な積分判定法を与えた。対称安定過程の場合にも同様の判定法が成立するが、その証明では対称安定過程のスケール則が効いている。本結果は、スケール則を持たない対称安定型過程や、フラクタル的構造を持つ空間上での対称安定過程にも適用可能である。特に後者の場合は、内在的距離が退化してしまうので、(1) など先行研究の枠組みから外れている。しかし、本成果を通じて脱出レートを明らかにできた。

- (3) (2) の枠組みで、粒子が出発点に（相対的に）近い集合に戻る確率の精密な評価を与えた。特にこの評価が、(2) の積分判定法で現れる積分式から定

まることが明らかになった。対称安定過程の場合は、より強い等式が成立する。しかし、その証明には対称安定過程のスケール則が効いている。一方で、本成果はスケール則がない状況でも成立している。

- (4) 双曲空間上のブラウン運動について、脱出レートの上下限に対する積分判定法を得た。この結果は、対称化測度が指数増大的である場合において、脱出レートの上下限の精密な評価が得られる例になっている。本成果は、より一般の状況下で脱出レートを考察する際の指針となることが期待される。
- (5) ユークリッド空間上の分枝ブラウン運動の拡散度が、シュレディンガー型作用素の最小固有値から決まることを示した。本結果により、分枝ブラウン運動で定まる粒子系は、分裂の効果によって、1粒子のブラウン運動よりも拡散度が真に強まることから従う。特に、分裂頻度を定める測度として、無限遠方において十分に小さいものを取れば、本結果は成立する。また、本結果において、分裂構造に関する球対称性は不要である。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計5件)

Yuichi Shiozawa, Quantification of global properties of symmetric Markov processes, RIMS Kokyuroku Bessatsu に掲載確定, 査読有(概説論文).

Yuichi Shiozawa, Bottom crossing probability for symmetric jump processes, Mathematische Zeitschrift に掲載確定, 査読有, DOI: 10.1007/s00209-017-1872-5

Yuichi Shiozawa, Escape rate of the Brownian motions on hyperbolic spaces, Proceedings of the Japan Academy, Series A, Mathematical Sciences, 査読有, 93, 2017, 27-29, doi:10.3792/pjaa.93.27

Yuichi Shiozawa and Jian Wang, Rate

functions for symmetric Markov processes via heat kernel, Potential Analysis, 査読有, 46, 2017, 23-53, DOI: 10.1007/s11118-016-9567-9

Yuichi Shiozawa, Lower escape rate of symmetric jump-diffusion processes, Canadian Journal of Mathematics, 査読有, 68, 2016, 129-149, DOI: <http://dx.doi.org/10.4153/CJM-2015-014-x>

[学会発表](計21件)

塩沢裕二, 対称マルコフ過程の大域的性質に関する話題, 岡山-広島析・確率論セミナー 2017, 岡山大学(岡山県岡山市), 2017年2月20日.

塩沢裕二, Bottom crossing probability for symmetric jump processes, 関西確率論セミナー, 京都大学(京都府京都市), 2017年1月27日.

Yuichi Shiozawa, Bottom crossing probability for symmetric jump processes, 3rd Workshop on Probability Theory and its Applications, Korea Institute for Advanced Study (KIAS), 2016年12月13日, ソウル(大韓民国).

Yuichi Shiozawa, Escape rate of the Brownian motions on hyperbolic spaces, Workshop on Dirichlet Forms and Stochastic Analysis, 関西大学(大阪府・吹田市), 2016年11月12日

塩沢裕一, Bottom crossing probability for symmetric jump processes, 福岡大学確率論研究集会, 福岡大学(福岡県博多市), 2016年8月4日.

塩沢裕一, Bottom crossing probability for symmetric jump processes, Okayama Spring Seminar on Stochastic Analysis, 岡山大学(岡山県岡山市), 2016年3月31日.

塩沢裕一, 対称マルコフ過程の経路解析に関する話題, 広島・岡山解析確率論セミナー, 広島大学(広島県東広島市), 2016年2月23日.

塩沢裕一, Rate functions for symmetric Markov processes via heat kernel, 東北確率論セミナー, 東北大学(宮城県仙台市), 2015年11月27日.

塩沢裕一, 対称マルコフ過程の経路解析に関する話題, 静岡確率論セミナー, 静岡大学(静岡県静岡市), 2015年11月13日.

塩沢裕一, Rate functions for symmetric Markov processes via heat kernel, 関西確率論セミナー, 京都大学(京都府京都市), 2015年11月6日.

塩沢裕一, Rate functions for symmetric Markov processes via heat kernel, 関西大学確率論セミナー, 関西大学(大阪府吹田市), 2015年10月24日.

塩沢裕一, 対称マルコフ過程の大域的性質とディリクレ形式, 日本数学会2015年度秋季総合分科会, 京都産業大学(京都府京都市), 2015年9月13日

Yuichi Shiozawa, Escape rate of symmetric Markov processes, 国際研究集会 Stochastic Analysis and Applications, 東北大学さくらホール(宮城県仙台市), 2015年9月1日.

Yuichi Shiozawa, Quantification of sample path properties of symmetric Markov processes, RIMS 合宿型セミナー 確率解析の新展開, 国際高等研究所(京都府木津川市), 2015年7月7日.

塩沢裕一, Quantification of global properties of symmetric Markov semigroups, 保存則をもつ偏微分方程式に対する解の正則性・特異性の研究, 京都大学数理解析研究所(京都府京都市), 2015年6月4日.

塩沢裕一, A note on the lower escape rate of symmetric jump-diffusion processes, 東北確率論セミナー, 東北大学(宮城県仙台市), 2014年11月21日.

塩沢裕一, A note on the lower escape rate of symmetric jump-diffusion processes, 関西大学確率論セミナー, 関西大学(大阪府吹田市), 2014年11月15日.

Yuichi Shiozawa, A note on the lower escape rate of symmetric

jump-diffusion processes, Workshop on Dirichlet Forms & Stochastic Analysis 2014, Technische Universität Dresden, 2014年10月26日, ドレスデン(ドイツ連邦共和国)

Yuichi Shiozawa, Escape rate of symmetric jump-diffusion processes, Dirichlet Form Theory and its Applications, Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach, 2014年10月23日, オーベルフォルファ(ドイツ連邦共和国)

Yuichi Shiozawa, Escape rate of symmetric jump-diffusion processes, 7th International Conference on Stochastic Analysis and its Applications, Seoul National University, 2014年8月7日, ソウル(大韓民国).

② 塩沢裕一, Escape rate of symmetric jump-diffusion processes, 神楽坂解析セミナー, 東京理科大学(東京都新宿区), 2014年6月28日.

〔図書〕(計0件)

〔産業財産権〕
該当なし

〔その他〕

6. 研究組織

(1) 研究代表者

塩沢 裕一 (SHIOZAWA, Yuichi)

岡山大学・大学院自然科学研究科・准教授

研究者番号: 60454518