様　式　C－１９、F－１９－１、Z－１９　(共通)

科研費
KAKENHI

# 科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　　元 年　　６ 月 １０ 日現在

機関番号：３２６４２
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2014～2018
課題番号：２６４００１３６

研究課題名（和文）確率最適輸送問題の一般化と平均場ゲームの研究

研究課題名（英文）A study of generalization of stochastic optimal transportation problems and mean field games

研究代表者
三上　敏夫（Mikami, Toshio）

津田塾大学・学芸学部・教授

研究者番号：７０２２９６５７

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,800,000円

研究成果の概要（和文）：確率最適輸送問題が有限になるための周辺分布に関する十分条件を与えた。
Sがシグマコンパクトな距離空間でS上の確率測度全体の空間が強位相を持つ場合に、Schrodinger汎関数方程式の解が周辺分布と核関数の連続関数やボレル可測関数であることを、Sがコンパクトな場合とそうでない場合に証明した。Sが完備可分でS上の確率測度全体の空間が弱位相を持つ場合には、解の連続性を示した。応用として、ユークリッド空間上に与えられた確率測度に対してある凸関数でそのモーント確率測度が元の与えられた確率測度になるものの構成を示した。

研究成果の学術的意義や社会的意義
確率最適輸送問題が有限であるための十分条件を与えたことにより、確率最適輸送理論の基礎が完成した。
調和経路過程を平均場ゲーム理論の枠組みで研究できることを示した。特に、それにより、確率最適輸送問題とその一般化を平均場ゲーム理論の枠組みで発展させることができる可能性を示せた。また、Schrodinger汎関数方程式の滑らかさの研究とその応用を示すことにより、確率最適輸送問題を確率測度空間上の汎関数方程式の問題として発展しうる可能性も出てきた。

研究成果の概要（英文）：We gave a sufficient condition under which stochastic optimal transportation problem is finite.
Suppose that S is a sigma compact metric space and the space of all probability measures on S is endowed with the strong topology. Then we proved the continuity and Borel measurability of the solution to Schrodinger’s functional equation with respect to marginal distributions and a kernel function, provided S is compact and noncompact respectively. Suppose, in addition, that S is complete and separable and that S is endowed with the weak topology instead. Then we proved the continuity of the solution. As an application, we constructed a convex function of which the moment probability measure is a give probability measure.

研究分野：確率論

キーワード：確率最適輸送問題　Schrodinger汎関数方程式　平均場偏微分方程式

## １．研究開始当初の背景

「砂山をある場所からある場所へ移動するのに最適な方法は何か？」という問題は、最適輸送問題と言われる変分問題で、輸送システム工学、画像処理、流体力学や経済学等に幅広く応用されている。また、この問題の研究からMonge-Ampere方程式の研究が始まった。この問題は、1781年にMongeが提唱し、1991年にBrenierがコスト関数が２次関数の場合に初めて完全に解決した。更に、1996年にGangboとMcCannは、この問題をコスト関数がより一般的な場合に解決した。また、近年、最適輸送問題と対数ソボレフ不等式、Hamilton-Jacobi方程式や微分幾何学との関係が明らかになってきている。Knotheは、非減少な三角写像を用いて、Brunn-Minkowskiiの不等式の証明をした。その無限次元版と対数ソボレフ不等式への応用及びある種の最適輸送問題の特異極限による特徴づけも知られている。研究代表者三上は、Knotheの写像の一般化をある付帯条件下での最適輸送問題の最適写像として定義した。

研究代表者三上は、「ユークリッド空間上の与えられた初期確率分布と終期確率分布を持つセミマルチンゲールの族に対する確率最適制御問題は、最適輸送問題の確率最適制御版と考えられる」事に気づき、それを確率最適輸送問題と名付けた。調和経路過程はマルコフ過程論や確率量子化において重要な役割を持つ確率過程である。研究代表者三上は、調和経路過程がある種の確率最適輸送問題の最小解になっていることを用いて、調和経路過程のゼロ雑音極限により、Brenier の定理を初めて確率論的に証明した。また、最適輸送問題の解決に重要な役割をはたした双対定理の確率最適輸送問題版を連続セミマルチンゲールに対して証明し、調和経路過程の新たな特徴付けも与えた。この結果は、Tan と Touzi により拡張され、数理ファイナンスの数値計算に応用されている。更に、研究代表者三上は、確率最適輸送問題の双対定理のゼロ雑音極限により、最適輸送問題の双対定理の別証明を与えた。これらの結果は、研究代表者三上により、与えられた周辺確率分布の族に対する確率最適輸送問題に拡張され、その応用として Nelson 過程の構成の新しいアプローチが与えられた。研究代表者三上は、Knothe 写像の一般化の確率過程版 Knothe-Rosenblatt process を調和経路過程の一般化として確率最適制御問題により定義し、そのある種の確率最適輸送問題の特異極限による特徴づけに関する部分的な結果も与えている。

平均場ゲームの微分方程式による研究は、LasryとLionにより始まった。そこでは、Hamilton-Jacobi方程式とFokker-Planck方程式の組の初期値終期値偏微分方程式系が研究対象になる。また、前向き後向き確率微分方程式によるアプローチは、CarmonaとDelarueにより与えられた。

## ２．研究の目的

(1)　Knothe-Rosenblatt process の一般化の存在と一意性の研究

Knothe-Rosenblatt process を定義するある種の確率最適輸送問題の有限性を初期分布と終期分布により特徴づける。一意性は、周辺分布問題の解の一意性の問題として研究する。

(2)　確率最適輸送問題と平均場(ゲーム)方程式を結びつける汎関数方程式の研究

①　初期分布を固定した場合に、Schrodinger 汎関数方程式の解の終期分布による汎関数表示を求める。また、その解の終期分布の関数としての滑らかさを調べる。

②　上記①を初期分布と終期分布が固定された場合の一般の確率最適輸送問題に拡張し、このクラスの確率最適輸送問題を平均場ゲーム理論の特別なクラスとして特徴付ける。

③　上記②を各時間ごとの周辺分布が固定された場合の確率最適輸送問題に対して研究する。

④　無限次元空間上の確率最適輸送問題として平均場ゲームを考え、その双対定理を証明し、双対定理から平均場方程式を確率論的に研究する。

## ３．研究の方法

(1)最新の研究情報の収集のための文献を整備、

(2)普段の研究組織内の研究打ち合わせ(email及び直接の研究打ち合わせ)、

(3)国際会議での情報収集と成果発表、

(4)必要に応じての国内の研究協力者との討論並びに情報交換。

## ４．研究成果

(1) Schrödinger 汎関数方程式がコスト関数がノルムの２乗の場合の確率最適輸送問題のガトー微分の方程式であること、及び Monge-Ampere 方程式がコスト関数がノルムの２乗の場合の最適輸送問題のガトー微分の方程式であることを示した。

(2)確率最適輸送問題の有限性の問題を考えた時、コスト関数がノルムの２乗の場合は、確率最適輸送問題は、初期値分布と終期分布を固定した場合のエントロピー最小化問題になる。この場合に、対数ソボレフ不等式による評価の方が我々が以前得た結果より良いことを示した。これは、我々の以前のアプローチが時間について対称なために初期分布と終期分布の効果を考慮せざるをえなかったのに対して、対数ソボレフ不等式によるアプローチは、終期分布の効果のみを考えれば良いためである。ただし、我々のアプローチは一般的なコスト関数に対して適応できるという点で優れている。

(3)空間次元が１次元の最適輸送問題において、コスト関数が凹の場合の最小解からなる独立確率変数列を考え、それから作られるランダムな経験分布の中心極限定理、さらには、極限分布としてピン留めされた１次元ブラウン運動の範囲が出てくることを示し、その確率分布関数を求めた。特に、テータ関数の変換公式を用いて、２つの表現を与えると共に、逆に、確率論的な考察と偏微分方程式による考察からテータ関数のある種の変換公式が示されることも証明した。２次元独立確率変数列からなる経験分布関数列に対する大数の法則の sup-norm の意味での収束率が一番早いのが確率変数の copula が Hoeffding-Frechet 上界の時であり、その確率分布は１次元ピン留めブラウン運動の sup-norm の分布であることを示した。また、ある１次元ピン留めブラウン運動の族が存在し、その値域の長さの族に関する sup で、上記収束率がすべての場合に上から抑えられることを示した。特に、確率変数の copula が Hoeffding-Frechet 下界の時には、上記収束率は、ある一つの１次元ピン留めブラウン運動の値域の長さになることもわかった。また、確率変数の copula が Hoeffding-Frechet 上界及び下界の時に、経験分布関数の copula を具体的に求めた。特に、経験分布関数はランダムであるのに、それらがランダムではないことを示した。更に、海外共同研究者の Kansas 大学 Jin Feng 教授を訪れ、その助言を基に、copula の１次元周辺分布が一様分布であり、特に、密度があることを用いて、経験分布関数列に対する大偏差定理を示した。Jin Feng 教授と、ランダム行列の大偏差原理の研究に現れる作用汎関数が有限な場合に、その確率分布が密度関数を持つかについて、最適輸送問題の観点から議論した。結果的には、反例が見つかった。

(4)S をシグマコンパクトな距離空間、核関数 k を直積空間 S×S 上で定義された正の連続関数、P,Q を S 上のボレル確率測度とする。直積測度 P×Q に対する Schrodinger 汎関数方程式の解(である直積測度)m×n は一意的に定まることが B. Jamison により知られている。m×n に対して、我々は次の結果を得た。

① Sがコンパクトな場合：S上の有限ボレル測度全体の空間には全変動距離から決まる位相を、S×S及びS上の連続関数全体の空間には一様収束で決まる位相を入れる。m(S)=n(S)とすると、m,n自身が一意的に定まることがBeulingにより示されており、特に、m,nは、P,Q，kの関数である。我々は、m=m(P,Q,k)，n=n(P,Q,k)が(P,Q,k)の連続関数であることを示した。また、P×Qのm×n

に対するRadon-Nicodym微分はu(x)+v(y)の形にかけるが、u,vが(P,Q,k)の連続関数であること、u=u(x,P,Q,k), v=v(x,P,Q,k)が(x,P,Q,k)の連続関数であることを示した。

② Sがシグマコンパクトな場合：S上のRadon測度全体の空間には漠位相を、S上の連続関数全体の空間には広義一様収束で決まる位相を入れる。我々は、m×nはP,Q,kのBorel可測関数であること、u=u(x,P,Q,k), v=v(x,P,Q,k)が(x,P,Q,k)のBorel可測関数であることを示した。応用として、与えられた初期分布と終期分布から決まる調和過程のドリフト関数が、時間、空間、密度関数に関してBorel可測であること、特に、その周辺確率密度関数があるクラスの平均場偏微分方程式を満たすことを示した。

③ Sが完備可分な場合:Sの上の確率測度全体の空間に弱位相を入れる。このとき、Schrodinger汎関数方程式の解 m(P,Q,k)×n(P,Q,k)が(P,Q,k)の連続関数であることを示した。特に、状態空間Sがコンパクトな場合には、m(P,Q,k)、n(P,Q,k)の各々が(P,Q,k)の連続関数であることも示した。応用として、ユークリッド空間上に与えられた確率測度に対してある凸関数でそのモーメント確率測度が元の与えられた確率測度になるものを構成した。証明方法は、ブラウン運動に対する確率最適輸送問題に関するある種の凸凹変分問題を考え、その最小解の存在と緊密性を示し、収束する極限を取り出すとその極限が求めるモーメント確率測度であるというものである。ここで、鍵を握るのは、考えている確率最適輸送問題がブラウン運動に関するものであり、その解を記述する関数u,vが半凸関数であることである。これは、核関数kがブラウン運動の推移確率確率関数、即ち、ガウス核であり、その対数が空間変数について凹な２次関数であることに起因する。

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕（計　2件）

① 三上敏夫、Regularity of Schrodinger's functional equation and mean field PDEs for h-path processes、Osaka J. Math.、査読有、 56巻、2019、掲載予定

② 三上敏夫、Two end points marginal problem by stochastic optimal transportation、SIAM J. Control Optim.、査読有、 53巻、2015、2449-2461

〔学会発表〕（計　9件）

① 三上敏夫、Regularity of Schrodinger's functional equation in the weak topology and its applications、The tenth meeting on Probability and PDE、2018

② 三上敏夫、シュレディンガーの問題に関する平均場マスター方程式について、ディリクレ形式と対称マルコフ過程、2017

③ 三上敏夫、確率最適輸送問題ー力学におけるE.Schrödingerの確率論的問題のある一般化ー、企画特別講演、日本数学会秋季総合分科会2017、2017

④ 三上敏夫、Measurability of Schrodinger's functional equation and the mean field PDEs、Session: Latest Development in Optimal Transportation Theory, 2017 IMS-China International Conference on Statistics and Probability、2017

⑤ 三上敏夫、秋吉美里、A remark on the asymptotic behaviors of empirical distribution functions、マルコフ過程とその周辺、2016

⑥ 三上敏夫、Two end points boundary value problems on stochastic optimal transportation and Fokker-Planck equation、 SIAM Conference on Control and Its Applications、2015

⑦ 三上敏夫、Reachability of the Fokker-Planck Equation、
第12回浜松偏微分方程式研究集会、2014

⑧ 三上敏夫、双対定理による確率最適輸送問題の周辺分布問題への応用、
THE NINTH MEETING ON PROBABILITY AND PDE、2014

⑨ 三上敏夫、確率最適輸送問題の2点確率境界値問題への応用，
第 63 回理論応用力学講演会 OS15「確率微分方程式の諸問題と生物学への応用」、2014

〔図書〕（計　　0 件）

〔産業財産権〕
○出願状況（計　　0 件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年：
国内外の別：

○取得状況（計　　0 件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等
https://edu.tsuda.ac.jp/~t.mikami/Research.html

６．研究組織

(1)研究分担者
研究分担者氏名：

ローマ字氏名：

所属研究機関名：

部局名：

職名：
研究者番号（8 桁）：

(2)研究協力者
研究協力者氏名：
ローマ字氏名：