様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ３０ 年　 ５ 月　 ８ 日現在

機関番号：１５４０１
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2014～2017
課題番号：２６４００１３７

研究課題名（和文）ポテンシャル解析による非線形偏微分方程式の研究

研究課題名（英文）Studies on nonlinear partial differential equations via potential analysis

研究代表者
平田　賢太郎（Hirata, Kentaro）

広島大学・理学研究科・准教授

研究者番号：３０３９９７９５

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,600,000円

研究成果の概要（和文）：非線形源泉項または吸収項を伴うLaplace方程式，p-Laplace方程式，熱方程式に対する特異点集合の次元，解の増大度，解の拡張可能性の間の関係について研究を行い，特異点集合として様々なフラクタル集合も扱える結果を得ることができた。また，Lipschitz領域において与えられた境界点に特異点をもち続ける半線形熱方程式の正値解の存在や，すべての正値解に対する先験的評価に関する結果も得ることができた。

研究成果の概要（英文）：We have investigated some relations among the dimension of a singular set, the growth rate of a solution and the removability of a singular set for the Laplace, p-Laplace, heat equations with nonlinear source or absorption terms, and obtained results which enable us to consider fractal sets as singular sets. Also, for semilinear heat equations in a Lipschitz domain, we have obtained results about the existence of positive solutions with isolated boundary singularities and a priori estimates for all positive solutions.

研究分野：数物系科学

キーワード：ポテンシャル論　偏微分方程式　実解析

１．研究開始当初の背景

特異点の除去可能性や解の拡張に関する研究の歴史は長く，多くの研究者によって取り組まれた関心ある研究対象の１つである。有界正則関数の孤立特異点の除去可能性に関する Riemann の定理や有界調和関数に対する容量 0 のコンパクト集合の除去可能性定理(Bouligand, 1926)およびその優調和関数への拡張(Brelot, 1941)は複素解析学やポテンシャル論の研究において重要な役割を果たした。更に，1964 年には Serrin によって 2 階一様楕円型線形方程式や準線形楕円型方程式へ拡張され，偏微分方程式論分野においても盛んに研究されるようになった。n 次元 Euclid 空間内の容量 0 のコンパクト集合の Hausdorff 次元は高々n-2 であるため，次元が大きい集合の除去可能性あるいは次元が小さい集合に対して関数の有界性条件よりも弱い条件のもとで除去可能定理が成り立つかが問題となった。調和関数については Carleson による研究が有名であり，

(A) n-2+α次元 Hausdorff 測度が 0 の集合は α-Holder 連続な調和関数に対して除去可能である

(B) m＜n-2 のとき，m 次元 Hausdorff 測度が有限な集合は(n-m)/(n-m-2)乗可積分な調和関数に対して除去可能である

ことが示された。前者(A)については前回の科研費補助期間中に半線形楕円型方程式の解に拡張することができた。後者(B)については，Serrin (1964)の 2 編の論文で 2 階一様楕円型線形方程式や準線形楕円型方程式に対して類似物が得られたが，少し強い可積分条件が仮定された。最大値・最小値原理のような比較原理が適用できる場合は，これらの結果は比較的容易に得ることができるが，非線形項を伴う楕円型方程式のように比較原理が成り立たない場合は工夫を要する。

一方，孤立特異点の除去可能性については関数の有界性は強い条件であり，基本解との比較が問題になる。すなわち，原点で定義されていない調和関数 u が増大条件

$$u(x)=o(|x|^{2-n}) \quad (x\to 0)$$

を満たすならば，u は原点まで調和に拡張できる。この事実は最大値・最小値原理を用いて容易に示されるが，基本解$|x|^{2-n}$は n/(n-2)乗可積分でないので(B)からは得られない。半線形楕円型方程式の場合，孤立特異点の除去可能に関する問題は容易ではなく，1980 年頃から Brezis, Veron, Lions, Aviles など著名な研究者により活発に研究され，非線形指数が n/(n-2)より小さい，等しい，大きいで状況が異なることが明らかにされた。また，上述のような半線形楕円型方程式は幾何学の山辺問題との関係もあり，与えられた m 次元コンパクト多様体上に特異点をもつ正値解の存在が 1990 年代から Pacard, Mazzeo, Fakhi 等により研究された。彼らは (n-m)/(n-m-2)≦q＜(n-m+2)/(n-m-2)の場合に$-\Delta u=u^q$の正値解の構成について様々な方法を開発したが，より一般の非線形項については適用できないものであった。

２．研究の目的

半線形楕円型方程式と p-Laplace 方程式および半線形放物型方程式に対して，次元の小さい集合上の特異点の除去可能性および特異点をもつ解の存在について，特に次の問題をポテンシャル論の手法を用いて解明することを目標とする。ただし，n は空間の次元である。

(Q1) (B)に対応する結果“m＜n-2 のとき，m 次元 Hausdorff 測度が有限な閉集合 E は半線形楕円型方程式の(n-m)/(n-m-2)乗可積分な解に対して除去可能である”は成り立つか？p-Laplace 方程式の場合は可積分指数は p にも依存するであろう。除去可能集合のサイズと可積分指数の関係を明らかにする。また，(n-m)/(n-m-2)乗可積分でなく E 上に特異点をもつ解の存在について考察する。

(Q2) m＜n-2 のとき，或る性質をもつ m 次元 Hausdorff測度が有限な閉集合 E は増大条件

$$u(x)=o(|x-a|^{2-n+m}) \quad (x\to a\in E)$$

を満たす半線形楕円型方程式の解に対して除去可能であるか？p-Laplace 方程式の場合は，除去可能集合のサイズと解の増大度の関係を明らかにする。また，E に特異点をもちその付近での増大度が 2-n+m である解の存在について考察する。

(Q3) 半線形放物型方程式について(Q1)と(Q2)に対応する問題を考える。時間変数が加わるが，単なる次元の書き換えでは済まず，放物型距離に関して Hausdorff 測度，可積分条件，増大条件を考えなければならない。時間があれば，解の爆発問題との関係について考察する。

３．研究の方法

調和関数の結果や先行研究の証明方法の本質を見抜きポテンシャル解析を駆使して半線形楕円型方程式に対して問題(Q1)と(Q2)の解明を試みる。ここで開発した方法において p-Laplace 方程式の場合に適用できない箇所を中心に再検討を行う。以上については研究分担者と密に連絡をとって進捗状況を確認しつつ，定期的に相互訪問を行って問題解決に向け意見交換して進める。また，放物型ポテンシャル論の知識を活かして半線形熱方程式に対する問題(Q3)を考察する。途中経過や研究成果を研究集会やセミナーで発表しつつ，関連分野の研究集会に積極的に参加して情報収集や意見交換を行い，解決方策の発見や質のある論文作成に努める。

４．研究成果

問題(Q1)についてはRieszポテンシャルに対するSobolevの不等式と反復法で容易に示されることがわかったため論文としてまとめなかった。そこで，問題(Q2)と問題(Q3)および関連問題について集中的に研究を行い以下の成果を得た。

(1) 半線形楕円型方程式$-\Delta u=V(x)|u|^{q-1}u$ の解の増大度と特異点集合の除去可能性：
$0<q<(n-m)/(n-m-2)$のとき，閉集合E がm次元Hausdorff測度に関する正則性条件と一様Minkowski条件を満たすならば，増大条件 $u(x)=o(d(x,E)^{2-n+m})$を満たす解に対して集合Eは除去可能であることを証明した。証明方法はポテンシャル評価と反復法に基づく。さらに，この増大条件の最良性を示すために，$d(x,E)^{2-n+m}$に比較可能な正値解の存在を一般化加藤族に対するポテンシャル解析と不動点定理を用いて明らかにした。

(2) 熱方程式の劣解の増大度と特異点集合の除去可能性および吸収項を伴う熱方程式への応用：
放物型距離に関するm次元Minkowski容量を導入し，その量が有限である閉集合Eは増大条件 $u^+(x,t)=o(d_p(x,t;E)^{m-n})$を満たす劣解に対して除去可能であることを証明した。証明方法は１の分割定理と積分評価に基づく。さらに，可積分条件を満たす劣解の拡張可能性も明らかにした。これらの結果の応用として，吸収項を伴う熱方程式 $u_t-\Delta u=-u^p$の非負値解に対しても同様の除去可能性定理を得ることができた。

(3) 源泉項又は吸収項を伴う p-Laplace 方程式$-\Delta_p u=V(x)u^q$又は$\Delta_p u=V(x)u^q$の非負値解の増大度と特異点集合の除去可能性：
$0<q<(n-m)(p-1)/(n-m-p)$のとき，閉集合Eがm次元Hausdorff測度に関する正則性条件と一様Minkowski条件を満たすならば，条件$u(x)=o(d(x,E)^{(p-n+m)/(p-1)})$を満たす非負値解に対して集合Eは除去可能である。証明方法は劣解および優解に対する特異点集合の除去可能性，Wolffポテンシャル評価，Riesz測度の評価と反復法に基づく。さらに，典型的なフラクタル集合も上記除去可能な特異点集合の条件を満たすことを明らかにした。

(4) 有界Lipschitz領域において，境界に特異点をもち続ける半線形熱方程式 $u_t-\Delta u=V(x,t)u^q$の正値解の存在：
非線形指数qが領域の形状によって定まる或る定数より小さいとき，各時刻でMartin核と同じ特異性をもつ正値解が存在することを示し，それが時間無限大でMartin核と比較可能な定常解に収束することを明らかにした。証明方法は先行研究で得た熱核評価，一般化加藤族のポテンシャル解析と不動点定理に基づく。この一般的な方法により非線形指数qが変動する場合にも同様の結果が成り立つことがわかった。

(5) 有界 Lipschitz 領域における半線形熱方程式 $u_t-\Delta u=V(x,t)u^q$の非負値解に対する境界増大評価：
非線形指数qが領域の形状によって定まる或る定数以下のとき，すべての非負値解が境界付近で熱方程式の正値解と同じ増大評価を満たすことを明らかにした。証明方法は先行研究で得た熱核評価や調和関数に対する Carleson 評価と境界減衰評価および反復法に基づく。特に，本研究で得た評価は，Polacik-Quittner-Souplet(2007)によって V=1 の場合に得られた方程式のスケール不変性に基づく増大評価の改良を与える。

(6) 有界一様領域において，境界に特異点をもつ Lane-Emden 方程式$-\Delta u=u^q$の正値解の存在・非存在：
$1<q<q_*$（領域の形状によって定まる定数）かつ境界が原点0を含むとき，或る正定数λ_0が存在して，$0<\lambda\leqq\lambda_0$ならば原点に極をもつMartin核と比較可能，すなわち
$$\lambda M(x,0)\leqq u(x)\leqq 3\lambda M(x,0),$$
を満たす正値解が存在するが，$\lambda>\lambda_0$ならば0に特異点をもつ正値解は存在しないことを明らかにした。証明方法は不動点定理，境界増大評価と非接極限，劣解・優解の方法と Harnack の収束定理に基づく。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計６件）

① K. Hirata, Existence and nonexistence of a positive solution of the Lane-Emden equation having a boundary singularity: the subcritical case, Monatshefte fur Mathematik，査読有，（掲載決定）

② K. Hirata, A priori growth estimates for nonnegative supertemperatures and solutions of semilinear heat equations in a Lipschitz domain, Journal d’Analyse Mathematique，査読有，（掲載決定）

③ K. Hirata & T. Ono, Removable sets for

continuous solutions of quasilinear elliptic equations with nonlinear source or absorption terms,
Annali di Matematica Pura ed Applicate, Series IV，査読有，Vol. 197，(2018)，41-59
DOI: 10.1007/s10231-017-0667-y

④ K. Hirata, Removable sets for subcaloric functions and solutions of semilinear heat equations with absorption,
Hokkaido Mathematical Journal，査読有，Vol. 45，(2016)，195-222
DOI: 10.14492/hokmj/1470139401

⑤ K. Hirata, Positive solutions with a time-independent boundary singularity of semilinear heat equations in bounded Lipschitz domains,
Nonlinear Analysis. Theory, Methods & Applications，査読有，Vol. 134，(2016)，144-163
DOI: 10.1016/j.na.2015.12.026

⑥ K. Hirata & T. Ono, Removable singularities and singular solutions of semilinear elliptic equations,
Nonlinear Analysis. Theory, Methods & Applications，査読有，Vol. 105，(2014)，10-23
DOI: 10.1016/j.na.2014.04.002

〔学会発表〕（計１０件）

① K. Hirata, A Carleson estimate for positive solutions of the Lane-Emden equation in a Lipschitz domain,
Potential Analysis and its Related Fields 2017，2017 年

② 平田賢太郎，Existence and nonexistence of a positive solution of the Lane--Emden equation having a boundary singularity,
2017 年度ポテンシャル論研究集会，2017 年

③ 平田賢太郎，Ahlfors regularity of Hausdorff measure on self-similar sets,
広島ポテンシャル論セミナー，2017 年

④ 平田賢太郎，Lane-Emden 方程式の正値解に対する先験的評価とその応用，
RIMS 研究集会「関数空間の構造とその周辺」，2017 年

⑤ 平田賢太郎，Growth estimates for nonnegative supertemperatures satisfying a nonlinear inequality in a Lipschitz domain,
2016 年度ポテンシャル論研究集会，2016 年

⑥ 平田賢太郎，Lipschitz 領域上の半線形熱方程式の正値解に対する境界増大評価，
名城大学ポテンシャル論セミナー，2016 年

⑦ 平田賢太郎，A sharp growth estimate for nonnegative solutions of semilinear heat inequalities in a Lipschitz domain,
研究集会「ポテンシャル論とその関連分野」，北海道大学，2016 年

⑧ 平田賢太郎，An improved growth estimate for positive solutions of a semilinear heat equation in a Lipschitz domain,
駒場調和解析セミナー，2016 年

⑨ 平田賢太郎，増大条件を満たす半線形楕円型方程式の解に対する除去可能定理，
実解析学シンポジウム 2014，2014 年

⑩ 平田賢太郎，Removable sets for solutions of semilinear elliptic equations satisfying a growth condition,
2014 年度ポテンシャル論研究集会，福山大学宮地茂記念館，2014 年

〔その他〕
ホームページ等：
http://home.hiroshima-u.ac.jp/hiratake/

６．研究組織

(1)研究代表者
平田　賢太郎　(HIRATA KENTARO)
広島大学・大学院理学研究科・准教授
研究者番号：30399795

(2)研究分担者
小野　太幹　(ONO TAKAYORI)
福山大学・大学教育センター・准教授
研究者番号：60289270