

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 30 年 6 月 21 日現在

機関番号：15401

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2014～2017

課題番号：26400139

研究課題名(和文) 多次元予測理論の新手法の展開とファイナンスにおける動的従属性解析手法の開発

研究課題名(英文) Development of new multivariate prediction theory and dynamic dependency analysis in finance

研究代表者

井上 昭彦 (Inoue, Akihiko)

広島大学・理学研究科・教授

研究者番号：50168431

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,600,000円

研究成果の概要(和文)：(1) 井上と笠原は、予測理論的手法を多次元に拡張するというM. Pourahmadi氏との共同研究を完成させた。

(2) 井上は、森内・仲村両氏との共同研究で、研究代表者等による確率解析を非マルコフの設定で用いる枠組みを応用することで、いくつかの良い性質を持つ新しい短期金利モデルを導入した。

(3) 離散時間定常過程において、ARMA過程は、非常に基本的で応用上も重要なモデルである。研究代表者と分担者の笠原は、共同研究で、1次元のARMA過程の偏相関関数や有限予測誤差に対する行列表示の形をした閉形式表示を導いた。

研究成果の概要(英文)：(1) In joint work with M. Pourahmadi, Inoue and Kasahara completed the work to extend the new method in prediction theory to multivariate processes.

(2) In joint work with Shingo Moriuchi and Yusuke Nakamura, A. Inoue introduced a new short rate model which has several good properties. This is an application of a framework introduced by A. Inoue and others, which admits the use of stochastic analysis in non-Markovian set up.

(3) The ARMA processes are one of the most important models in discrete-time stationary processes. In joint work, A. Inoue and Y. Kasahara derived closed-form Matrix expressions for partial autocorrelation functions and finite prediction errors of univariate ARMA processes.

研究分野：確率論

キーワード：予測理論 非マルコフ 確率解析 ARMA 過程 偏相関関数 有限予測誤差

1. 研究開始当初の背景

代表者の井上は [A. Inoue, Journal d'Analyse Mathématique 81 (2000), 65-109] や [A. Inoue, Probability Theory and Related Fields 140 (2008), 523-551] (PTRF に投稿されたのは 2001 年であるが、出版は 2008 年と、大幅に遅れた) において、定常時系列の有限予測誤差や偏相関関数 (直交多項式における Verblunsky 係数と本質的に同じもの) に対する表現定理を示したが、それらが、「有限予測における表現定理」の原形である。これらは、定常過程や定常増分過程等の確率過程の有限の過去からの予測 (略して有限予測) に現れる予測誤差、偏相関関数、有限予測係数等の確定的な量あるいは関数に対する表現定理であり、それらを AR 係数や MA 係数、特にそれらの組み合わせでできるベータ () という数列あるいは関数 (相関数のフーリエ係数と同じもの) によって無限級数表示する。例えば定常時系列を例にとると、そのスペクトル密度、あるいはむしろその解析的分解である外部関数 h 、から見て、有限予測に関する有限予測係数や偏相関関数は非線形性が大変強く、それらの漸近的性質を調べることは、我々の研究の前までは簡単ではなかった。一方、無限の過去からの予測 (Wiener 予測ともよばれる) に関する数列である AR 係数や MA 係数は、スペクトル密度の分解である外部関数 h やその逆数の冪級展開の係数であり、それらの漸近的性質等は明瞭に分かる。我々の表現定理は、簡単そうで実は解析的研究が難しい有限予測に関する偏相関関数等を、これらの正体が良くわかる AR 係数や MA 係数、あるいはベータで陽に明示表示するものであり、この表現定理を通じて、それらの有限予測に関する量あるいは関数の、例えば漸近解析を、著しく容易にした。

研究代表者の井上は、研究分担者の笠原氏等と共に、上に述べた [A. Inoue, Annals of Applied Probability 12 (2002), 1471-1491] や [A. Inoue, Probability Theory and Related Fields 140 (2008), 523-551]、あるいは [A. Inoue and Y. Kasahara, Journal of Multivariate Analysis 89 (2004), 135-147]、[A. Inoue and Y. Kasahara, The Annals of Statistics 34 (2006), 973-993] 等で離散時間過程に対し、また [V. V. Anh, A. Inoue, A. and Y. Kasahara, Stochastic Analysis and Applications 23 (2005), 301-328]、[A. Inoue and V. V. Anh, Stochastic Analysis and Applications 25 (2007), 641-666]、[A. Inoue, Y. Nakano and V. V. Anh, Journal of Applied Mathematics and Stochastic Analysis 2006, Art. ID 53104]、[A. Inoue and Y. Nakano, Applied Mathematics and Optimization 55 (2007), 93-122.] 等で連続時間過程に対し、上記タイプの表現定理を進展させ、予測係数と偏相関関数の漸近挙動、長期記憶モデルに対する Baxter の不等式、

分数冪ブラウン運動型確率過程に対する予測公式、新生過程の明示表現等の種々の成果を得た。また、この成果をファイナンスのモデリングとその解析に応用した。特に、我々が示した長期記憶モデルに対する Baxter の不等式は、他の研究者たちにより、これらのモデルのブートストラップに直ちに適用された。

ここまでは、1 変量過程に対する結果である。これらの結果を多変量過程の有限予測に拡張するという試みは、すでに 2005 年夏に、井上 笠原 Pourahmadi の共同プロジェクトとして行われたが、結果として、1 変量と多変量の場合の違いを痛感させられるだけで終わってしまった。例えば、我々の 1 変量過程の場合の議論では、まず AR および MA 係数による無限級数表示を得たあと、それを漸近解析等の応用に適した形のベータによる表示にまとめるために、無限級数に現れるスカラー量の積の順序交換を頻繁に行う。しかし、多変量になると、これらの積は行列の積に変わるので、同様の積の順序交換はできなくなり、そこで 1 変量の場合の議論は破綻してしまうのである。

その後、2011 年になるまで、この多変量有限予測への拡張の問題に対する進展は、全く無かった。ようやく 2011 年になり、井上と笠原氏が広島大学で会話している間に、この問題に関するブレーク・スルーが起こった。我々はこのブレーク・スルーを基にして、上に述べた 2005 年の井上 - 笠原 - Pourahmadi のプロジェクトを再開し、上記の結果を多次元に拡張する見通しを得た。

2. 研究の目的

本研究の目的は、[A. Inoue, Journal d'Analyse Mathématique 81 (2000), 65-109] や [A. Inoue, Probability Theory and Related Fields 140 (2008), 523-551] において、研究代表者の井上により導入され、その後、笠原、Anh、中野各氏の共同研究者と共に発展させられてきた「有限予測における表現定理とその応用」の理論を、まず、応用上重要な多次元の場合に拡張する研究を完成させることである。さらに、このアプローチを様々に拡張し、その成果をファイナンスにおける動的従属性解析手法の開発にも応用する。また、関連する解析学の諸問題の解明にも取り組む。

3. 研究の方法

本研究の方法は、次の (i), (ii) の 2 つが基礎となっており、完全に我々独自のものである：

- (i) 上に述べた [A. Inoue, Journal d'Analyse Mathématique 81 (2000), 65-109] や [A. Inoue, Probability Theory and Related Fields 140 (2008), 523-551]、で研究代表者の井上により導入され、その後、研究分担者の笠原氏等とともに発展させられてきた有限予測係数における AR

係数、MA 係数あるいはベータによる表現定理。

- (ii) (i) を多変量の場合に拡張することに関する井上-笠原-Pourahmadi の最近のブレイク・スルー。

4. 研究成果

(1) 井上-笠原-Pourahmadi による、有限予測における表現定理の手法を多変量に拡張するという研究を完成させ、3人による3つの論文として発表した。詳細は次の通りである：

(i) [Proceedings of AMS 144 (2016), 1779-1786] この論文では、我々の手法で基本的となる(IPF)という性質に関する必要十分条件、および便利な十分条件を、多変量過程に対して示した。

有限予測理論における表現定理を導く基本的な方針は、von Neumann の交互射影定理と(定常過程等の)「過去と未来の交差性」(Intersection of past and future property, 略して IPF)という性質を組み合わせるといふものである。この(IPF)という性質はいつでも成り立つわけというわけではないので、考える過程に対して証明する必要がある。1変量の場合には、井上によりスペクトル密度の逆数の可積分性(minimality とよばれる)の下で、[Journal d'Analyse Mathématique 81 (2000), 65-109]において示されている(この論文は、「有限予測理論における表現定理の手法」を導入した論文である)。minimality は応用上重要なほとんどの過程に対して成り立つので、この条件は大変便利な十分条件である。その結果の証明は、Levinson-McKean の連続時間過程に対するある定理の証明をまねたものであり、解析的には、ややハードである。我々の PAMS (2016) の論文は、この(minimality) (IPF) を系として含む一般的な結果を多変量定常過程に対して示したものである。特にその証明を1変量過程に適用すると、井上の JAM (2000) の証明に比べはるかに単純化されていることが分かる。実は井上と笠原氏は Pourahmadi 氏に2004年に教えてもらうまで知らなかったのであるが、(IPF) に似た性質として (CND) (complete nondeterminism, 完全非決定性) という性質が1変量過程の場合に、Sarason (1978) により導入されていて、さらに Bloomfield-Jewell-Hayashi (Pacific J. Math., 1983) により、Hardy 関数の rigidity という性質による (CND) の特徴付けが得られていた。この rigidity という性質は、Sarason (1989) により導入されたものであるが、実はすでに同じ概念が中路 (1983) により、strongly outer の名で導入されていた。1変量の場合、井上-笠原 (AOS, 2006, Thm. 2.3) において、弱い条件の下、(IPF) (CND) が成り立つことが示されている。実は結果的には、多変量でも、弱い条件の下で、(IPF) (CND) になることが分かる。これらのことを踏まえて、必要なことを多変量に拡張し整理するこ

とで、PAMS (2016) の結果に導かれるのである。

(ii) [Integral Equations and Operator Theory 84 (2016), 289-300] (i) で述べた1変量の場合の rigid という概念は、様々な分野に現れる。この論文では、まず rigid という概念を行列値の Hardy 関数にまで拡張した。その拡張は、Helson-Lowdenslager (1958) による Hardy 関数の分解が基になっている。そして、1変量過程の (CND) という性質を外側関数 h の冪が rigid という性質で特徴づける上記の Bloomfield-Jewell-Hayashi (1983) の結果を、多変量過程に拡張した。

(iii) [Bernoulli 24 (2018), 1202-1232] この論文では、2011年のブレイク・スルーをもとに、「多変量有限予測における表現定理」を確立し、それを応用して、長期記憶モデルに対する井上-笠原 (AOS, 2006) の Baxter の不等式を、多変量過程長期記憶モデルに拡張した。

多変量過程に拡張する議論における鍵となったのは、次の3つの新しい要素の組み合わせである：

- (a) AR 係数や MA 係数による表示というよりも、ベータによる表示を直接導くという方針。
- (b) Von Neumann の交互射影定理と (IPF) の組み合わせの議論の一新。
- (c) 無限の過去および無限の未来からの予測にそれぞれ対応する前進および後進新生過程の使用。

これらの議論により、井上 (JAM, 2000) の有限予測誤差、井上 (PTRF, 2008) の偏相関関数、井上-笠原 (AOS, 2006) の有限予測係数、たちに対する表現定理を、多変量定常過程に理想的に拡張することができた。さらに、それらの表現定理の応用として、

- (A) 多変量長期記憶モデルに対する Baxter の不等式、
- (B) 多変量長期記憶モデルの有限予測誤差の漸近挙動、
- (C) 多変量長期記憶モデルの偏相関関数の漸近挙動、

を導いた。

(2) 研究代表者等により発展させられてきた予測理論的な手法の応用として、伊藤の確率解析を非マルコフの設定で用いるための一つの枠組みが得られている。森内慎吾・仲村勇祐両氏との共同研究において、この枠組みを土台にした新しい短期金利モデルを導入したところ、事前の予想以上に良い性質を持つことが分かった。その良い性質とは、次の3つである：

- (i) 債券価格に対する具体的な表現が得られる。
- (ii) 米国債等の現実のイールド曲線へのフィッティングの結果が非常に良い。
- (iii) この短期金利モデル自体は非マルコフであるが、別の伊藤過程と組み合わせることで2次元マルコフ過程を得ること

とができる。それにより、派生証券の価格の計算に関して、偏微分方程式の有限差分法等の通常の数値計算法を適用できるようになった。

この結果は、[Stochastic Analysis and Applications 33(2015), 1068-1082]に発表した。

(3) 離散時間定常過程の予測理論において、偏相関関数や有限予測誤差は、基本的な量である。一方、離散時間定常過程の中において、自己回帰移動平均過程 (Auto-Regressive Moving-Average 過程、略して、ARMA 過程) は、非常に基本的で応用上も重要なモデルである。本研究において、ARMA 過程の偏相関関数や有限予測誤差に対する行列表示の形をした閉形式表示が得られた。この閉形式表示は、考える ARMA 過程のスペクトル密度の分解に現れる外部関数の極の情報 (極の位置や位数等) によるものである。この結果の論文は、現在投稿中である。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 10 件)

- (1) Inoue, A. and Kasahara, Y., Simple matrix representations of the orthogonal polynomials for a rational spectral density on the unit circle, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 査読有, 464 巻, 2018, pp.1366-1374
- (2) Inoue, A., Kasahara, Y. and Pourahmadi, M., Baxter's inequality for finite predictor coefficients of multivariate long-memory stationary processes, *Bernoulli*, 査読有, 24 巻, 2018, pp.1202-1232
- (3) 井上昭彦、仲村勇祐、移動平均型定常増分過程に対する新生過程によるセミマルチンゲール表現、*数理解析研究所講究録*、査読無、2030 巻、2017、pp.32-38
- (4) Kasahara, Y. and Bingham, N. H., Coefficient stripping in the matricial Nehari problem, *Journal of Approximation Theory*, 査読有, 220 巻, 2017, pp.1-11
- (5) Inoue, A., Kasahara, Y. and Pourahmadi, M., The intersection of past and future for multivariate stationary processes, *Proceedings of the American Mathematical Society*, 査読有, 144 巻, 2016, pp. 1779-1786
- (6) Inoue, A., Kasahara, Y. and Pourahmadi, M., Rigidity for matrix-valued Hardy functions, *Integral Equations and Operator Theory*, 査読有, 84 巻, 2016, pp. 289-300
- (7) Inoue, A., Moriuchi, S. and

Nakamura, Y., A Vasicek-type short rate model with memory effect, *Stochastic Analysis and Applications*, 査読有, 33 巻, 2015, pp.1068-1082

- (8) 井上昭彦、森内慎吾、仲村勇祐、Vasicek モデルのひとつの拡張、*数理解析研究所講究録*、査読無、1952 巻、2015, pp.157-164
- (9) 井上昭彦、笠原雪夫、Mohsen Pourahmadi、多次元の予測理論的手法の最近の進展について、*数理解析研究所講究録*、査読無、1903 巻、2014、pp.67-72
- (10) Kasahara, Y. and Bingham, N. H., Verblunsky coefficients and Nehari sequences, *Transactions of the American Mathematical Society*, 査読有, 366 巻, 2014, pp.1363-1378

[学会発表](計 13 件)

- (1) 井上昭彦、新生過程の明示公式とファイナンスへの応用、ファイナンスの数理解析とその応用、2017 年 11 月 14 日、京都大学数理解析研究所 (京都府・京都市)
- (2) 井上昭彦、仲村勇祐、移動平均型定常増分過程に対する新生過程によるセミマルチンゲール表現、*確率論シンポジウム*、2016 年 12 月 19 日、京都大学数理解析研究所 (京都府・京都市)
- (3) 井上昭彦、定常増分過程のセミマルチンゲール表現と金利モデルへの応用、ファイナンスの数理解析とその応用、2016 年 11 月 28 日、京都大学数理解析研究所 (京都府・京都市)
- (4) 井上昭彦、仲村勇祐、移動平均型定常増分過程の新生過程によるセミマルチンゲール表現、*日本数学会 2016 年度秋季総合分科会*、2016 年 9 月 16 日、関西大学千里山キャンパス (大阪府吹田市)
- (5) 清水亮、井上昭彦、笠原雪夫、定常過程に対する Baxter 型不等式とポートストラップへの応用、*日本数学会 2016 年度秋季総合分科会*、2016 年 9 月 16 日、関西大学千里山キャンパス (大阪府吹田市)
- (6) 清水亮、井上昭彦、笠原雪夫、定常過程の移動平均近似について、*日本数学会中国・四国支部例会*、2016 年 1 月 24 日、広島大学 (東広島市)
- (7) 仲村勇祐、井上昭彦、Vasicek-type short rate models with memory

- effect, ファイナンスの数理解析とその応用、2015年11月17日、京都大学数理解析研究所(京都府・京都市)
- (8) 笠原雪夫、井上昭彦、Mohsen Pourahmadi, Rigidity for matrix-valued Hardy functions, 実解析学シンポジウム 2015、2015年10月24日、東邦大学習志野キャンパス(千葉県船橋市)
- (9) Yukio Kasahara, Akihiko Inoue and Mohsen Pourahmadi, Rigidity for matrix-valued Hardy functions, 日本数学会 2015 年度秋季総合分科会、2015年9月14日、京都産業大学(京都市)
- (10) Akihiko Inoue, Explicit representation of finite predictor coefficients for multivariate stationary processes, 38th Conference on Stochastic Processes and their Applications (国際学会), 2015年7月14日、Oxford (UK)
- (11) 仲村勇祐、井上昭彦、森内慎吾、記憶の効果を持つVasicekタイプの短期金利モデル、日本数学会 2015 年度年会、2015年3月21日、明治大学(東京都・千代田区)
- (12) 仲村勇祐、井上昭彦、森内慎吾、記憶の効果を持つ短期金利モデル、平成 26 年度日本数学会中国・四国支部例会、2015年1月25日、徳島大学(徳島県・徳島市)
- (13) 井上昭彦、多次元の予測理論的手法、九州確率論セミナー、2014年4月25日、九州大学(福岡県・福岡市)

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕

出願状況(計 0 件)

名称：
 発明者：
 権利者：
 種類：
 番号：
 出願年月日：
 国内外の別：

取得状況(計 0 件)

名称：
 発明者：
 権利者：
 種類：
 番号：
 取得年月日：

国内外の別：

- 〔その他〕
 ホームページ等
<http://home.hiroshima-u.ac.jp/inoue100/index-e.html>
<http://home.hiroshima-u.ac.jp/inoue100/>
6. 研究組織
- (1) 研究代表者
 井上 昭彦 (INOUE AKIHIKO)
 広島大学・大学院理学研究科・教授
 研究者番号：50168431
- (2) 研究分担者
 笠原 雪夫 (KASAHARA YUKIO)
 北海道大学・理学研究院・研究員
 研究者番号：10399793
- (3) 連携研究者
 ()
 研究者番号：
- (4) 研究協力者
 ()