1版

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　元 年　５ 月 ３１ 日現在

機関番号：１７２０１

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2014～2018

課題番号：２６４００１４２

研究課題名（和文）凝結・分裂過程の確率解析

研究課題名（英文）Stochastic analysis for coagulation-fragmentation processes

研究代表者

半田　賢司（Handa, Kenji）

佐賀大学・理工学部・教授

研究者番号：１０２３８２１４

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,200,000円

研究成果の概要（和文）：凝結・分裂といった現象は，自然界に広く見られる．その典型的な数学解析は，`基礎方程式’とみなされる非線形の方程式に基づく．これまでの研究では技術的理由で，単位時間当たりの平均「凝結率」「分裂率」についてはその増大度に限界があった．本研究では，ランダムに凝結・分裂が繰り返し行われる微視的レベルのモデルを適切に導入し，極限操作を適切に行うことにより，これまでの限界を超える増大度を持つ「凝結率」「分裂率」を許す特定のクラスの凝結・分裂方程式を導いた．

研究成果の学術的意義や社会的意義
自然現象のみならず社会現象の記述・理解には数学は欠かせない．本研究での対象は，少なくとも歴史的には物理的背景を主な動機として持つが，数学的記述そのものは非常に汎用性が高いため，例えば生物等の社会的集団の合併・分割といった現象の研究においても，本研究で議論したモデル（微視的確率モデルおよび導出された非線形方程式で記述されるモデル）は一定の役割を担うことが可能となる場合があると期待される．

研究成果の概要（英文）：The phenomena of coagulation and fragmentation are widely observed in nature. It is typical that the mathematical analysis for them is based on a nonlinear equation regarded as `the fundamental equation'. However, the previous studies are obliged to made the constraint on the growth order of the coagulation and fragmentation rates. In this research, introducing suitably a microscopic model describing random coagulation and fragmentation, and then taking a proper scaling limit, we have derived a certain class of coagulation-fragmentation equations with rates which are not necessarily satisfying the growth order previously required.

研究分野：確率論

キーワード：凝結　分裂　相関関数　可逆分布　定常分布　点過程　Poisson-Dirichlet分布

１．研究開始当初の背景

（１）凝結(coagulation)やその双対とも言える分裂(fragmentation)の現象は，煙・塵等の物理現象，コロイドやポリマー等の化学現象，天体や生物集団の形成のように，自然界に見られる現象における根本的な動的要素である．

（２）その数学解析は，多数の塊の大きさのみに着目して記述される時間発展モデルを導入してなされることが典型的である．例えば，有名な Smoluchowski の coagulation equation は凝結の効果のみを考えたときに，時刻 t において大きさ x の塊が全体に占める密度 c(t.x)が満たす非線形微分積分方程式である．分裂の要素も組み込んだ方程式は coagulation-fragmentation equation と呼ばれることが多い．しかしながら，そのモデルの特性量である凝結レート・分裂レートに対しては，かなり大きな制約（特に増大度について）が課せられていることが多い．統計力学において頻繁に議論されているように，この coagulation-fragmentation equation を基礎方程式と見立て，適切な微視的確率モデルからそれを導出する研究も数多くなされてきた．

２．研究の目的

（１）これまでに厳密に導かれていないような coagulation-fragmentation equation の厳密な導出は，本研究での大きな目標の一つである．

（２）それに先立って，ランダムに凝結 and/or 分裂が繰り返し行われるマルコフ過程モデルを適切に導入し，解析することで，個々の凝結・分裂現象の持つ数学的問題，あるいは特定のクラスの凝結・分裂現象に共通する普遍的法則を探求することも重要である．

（３）純粋に数学的の理論的観点からは，この種のモデルに対する解析的手法として系統立てられたものを提案することも一つの目的であると言える．

３．研究の方法

（１）ランダムな凝結・分裂により時間発展する具体的な確率モデルとして，区間の split-merge モデルをベースに考察する．Tsilevich(2001)により提案され，Mayer-Wolf ら(2002)により一般化されたこのモデルは,単位区間を可算個の小区間へと分割した状態(ただしそれらのサイズすなわち長さのみに着目する．）がランダムに変化していく離散時間マルコフ過程である．１ステップでの推移は，２つの小区間が merge して１つの小区間となるか，１つの小区間がその上の一様分布点を境に２つのさらなる小区間へと split するかのいずれかである．Mayer-Wolf らによる主結果の一つとして，Poisson-Dirichlet 分布と呼ばれる分布がこのモデルの（可逆）定常分布であることが示されていたことから，このモデルは深い解析を許す良い構造を備えていると考えられる．ただし，状態空間が無限次元単位単体というコンパクトなものであるため，極限定理を考えるためにはモデルの修正あるいは拡張が必要となる．

（２）上述のモデルは，言わばバイナリー（2 項的な）モデルであるが，より複雑なランダム凝結およびランダム分裂も既に議論されている．その先駆的なものは Pitman(1999)によるもので，上述の Poisson-Dirichlet 分布の一般化として Pitman-Yor(1997)により導入された無限次元確率法則の下で議論されており，無限個のクラスターが一つのクラスターへと coagulate する操作およびその逆の fragmentation 操作の間に成立する関係式の研究である．このモデルの数学的構造をより明らかにすることは，より一般の凝結・分裂操作を議論するための手がかりとして不可欠である．

４．研究成果

（１）Mayer-Wolf らが議論した「split-merge モデル」を拡張した新たなモデルを導入して調べた．一般化の方向は２つあり，状態空間を無限次元単体から錐へ拡張するとともに，凝結・分裂のレートの持つ斉次性指数を 2 から$(2+\lambda)$へ，１から$(1+\lambda)$へと拡張した．ただし，λは 0 以上の任意の実数である．このモデル対する主要な成果は以下①～④のように述べられる．

① マルコフ過程の構成

まず無限次元の錐の上の有界作用素により生成される連続時間マルコフ過程を構成し，それに時間変更を施すことにより非有界作用素に付随する連続時間マルコフ過程として我々のモデルは構成された．ここでは，凝結・分裂のレートが斉次的であること，ならびに既に述べた斉次的指数の設定が本質的な役割を果たしている．

② 点過程の理論に基づく可逆分布の特徴づけ

この一般的なモデルがどのような場合に可逆分布を持ち得るか，そしてその場合の可逆分布はどのように特徴づけられるかという自然な問題を議論する中で，点過程の理論（特に相関関数と Palm 分布）の言葉でそのような条件を明確に述べることができるという事実が見出された．その条件は，いわゆる「詳細調合条件」ともみなせるもので，凝結・分裂のレートと可逆分布に付随する１階および２階の Palm 分布とを，自然な形で結びつける一つの等式である．この結

果はMayer-Wolfらの結果を容易に再現するばかりでなく，それに基づいてこれまで知られていなかった可逆モデルおよび可逆分布の例（Poisson-Dirichlet 分布に適当な密度を施したもの等）をいくつか指摘することができた．
③ 相関測度の満たす階層的方程式系
凝結のみを考えたモデルについて，Escobedoら(2013)はその相関関数系がBBGKY階層と似た構造を持つ，階層的な時間依存方程式系を満たすことを示した．我々はそれに分裂の要素も加味したという意味でより一般的な階層的方程式系を，相関測度系によって弱い意味で満たされる方程式系として導いた．
④ coagulation-fragmentation equation の導出
適切なスケール変換を導入して，我々のモデルからcoagulation-fragmentation equationを導出する問題を考察した．Eibeckら(2000)は凝結レート・分裂レートに斉次性は課さないものの，その増大度についてかなり強い条件の下で議論を行い，極限定理を通じて同方程式の解の存在を示した．彼らがその条件を必要とした理由は主に，プロセスの緊密性のためである．我々の場合，斉次性指数に関わるパラメータλに上限を設けていないため，プロセスの緊密性の証明の段階で大きな困難が生じることになる．それを克服するためのカギはやはり斉次性指数の設定の仕方にあり，直感的に言うなら，その設定のお陰で，凝結が起こりすぎてしまう場合でも分裂が適度に起こることでプロセスの`暴走’に抑制がかかる，という状況となっていることがわかった．極限操作ならびに得られた方程式の形式そのものは従来のものと同じだが，凝結レート・分裂レートに課されている増大性の条件に関してはこれまでよりも大幅に緩和されたことになる．ただし，解析的な観点のみからすると，得られた結果はcoagulation-fragmentation equationの解の存在のみである．

（２）凝結・分裂操作の双対性
２パラメータPoisson-Dirichlet分布の下でPitman(1999)が示した「凝結・分裂双対性」の関係式について独自の視点で考察し，点過程やランダム測度の言葉でそれらを論じることで，見通しの良い別証明が得られた．また，副産物として，２パラメータPoisson-Dirichlet分布に従うランダム離散確率の平均エントロピーが2つのパラメータそれぞれの関数の和として表されることを示す等式が，Pitmanの双対性から直ちに従うという注意を与えた．

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕（計　１　件）
①半田賢司，ランダムな凝結・分裂操作の双対性，統計数理研究所共同研究リポート402， 2018年，pp. 43-54，査読無

〔学会発表〕（計　５　件）
①Kenji Handa，Random transpositions and coagulation-fragmentation equations，関西確率論セミナー，2018年

②Kenji Handa，Coagulation-fragmentation equations and underlying stochastic dynamics，Recent Progresses in Mathematical Theories for Biological Phenomena，2018年

③Kenji Handa，Coagulation-fragmentation equations and underlying stochastic dynamics，Second Interdisciplinary and Research Alumni Symposium iJaDe2018，2018年

④半田賢司，ランダムな凝結・分裂操作の双対性，統計数理研究所研究集会「無限分解可能過程に関連する諸問題」，2017年

⑤半田賢司，Ewens分布を不変にする2つのMarkov連鎖，統計数理研究所研究集会「官庁統計データの公開における諸問題の研究と他分野への応用」，2015年

〔その他〕
プレプリント：
https://arxiv.org/abs/1808.10674
The coagulation-fragmentation hierarchy with homogeneous rates and underlying stochastic dynamics.

６．研究組織