

令和元年6月10日現在

機関番号：32606

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2014～2018

課題番号：26400145

研究課題名(和文) ランダムシュレーディンガー作用素の準位統計

研究課題名(英文) Level Statistics for Random Schrodinger Operators

研究代表者

中野 史彦 (Nakano, Fumihiko)

学習院大学・理学部・教授

研究者番号：10291246

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,500,000円

研究成果の概要(和文)：原点からの距離のアルファ乗の逆数のオーダー減衰するような因子を乗じたランダムポテンシャルを持つ1次元シュレーディンガー作用素(及び類似の模型)について次を示した。

(i) 準位統計の問題を調べ、アルファが $1/2$ より大きいときには、クロック過程、 $1/2$ に等しい時にはサインベータ過程、 $1/2$ よりも小さいときにはポアソン過程であることを示した。(ii) 与えられた区間上の固有値の個数の漸近挙動を調べ、高次の項までの漸近展開を求めた。(iii) 関連する話題として、ガウシアンベータアンサンブルの高温極限における準位統計を考え、それがポアソン過程であることを示した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

1次元での様々なランダムシュレーディンガー作用素において、その準位統計を考え、それがポアソン過程以外になるものを得たこと、またランダム行列理論との関係を具体的に示したこと。またランダムシュレーディンガー作用素の研究手法のランダム行列理論への応用例。

研究成果の概要(英文)：We studied the one dimensional random Schroedinger operators with decaying facto, and with decaying coupling constant, in the order of  $-\alpha$  at infinity, and our results are as follows.

(i) the level statistics are : Clock, Sine\_{ $\beta$ }, and Poisson processes, depending on  $\alpha$  is bigger than, equal to, and less than  $1/2$ , (ii) the asymptotic expansion of the number of eigenvalues on a given interval, which shows different behavior depending on the value of  $\alpha$ , (iii) as a related question, the level statistics of the Gaussian beta ensemble at high temperature is Poisson.

研究分野：ランダムシュレーディンガー作用素

キーワード：準位統計 ランダム行列理論 サインベータ過程 ポアソン過程

## 様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19、CK - 19 (共通)

### 1. 研究開始当初の背景

ランダムシュレーディンガー作用素において、その準位統計は重要な問題であるが、当初知られている結果は格子モデルで参照エネルギーが局在状態にあるときにそれがポアソン過程である、という結果のみであり、連続空間上のランダムシュレーディンガー作用素についての準位統計の結果はほとんどなく、また参照エネルギーが絶対連続スペクトルや特異連続スペクトルにあるときの結果についてはほぼ皆無であった。

一方で、1次元の減衰因子を持つランダムポテンシャルを持つシュレーディンガー作用素は減衰オーダーの違いにより、絶対連続、特異連続、純点、と様々なスペクトル構造を持ち、数学的に大変興味深い対象である。

### 2. 研究の目的

1次元連続空間上の減衰因子ポテンシャル、また、減衰カップリング係数を持つシュレーディンガー作用素において、その減衰因子を変えたときの準位統計や、状態密度の漸近挙動を調べる。また関連するランダム行列についても類似の問題を考える。

### 3. 研究の方法

考える作用素を有界区間上に制限し、ディリクレ境界条件を課す。適当にスケールされた固有値の与えられた区間にあるものの個数をプリューファー変数を用いて表現し、そのプリューファー変数のスケール極限を確率解析、とくに1次元拡散過程の手法を用いて詳細に解析する。

### 4. 研究成果

減衰因子のオーダーをアルファ乗の逆数とする。準位統計はアルファ = 1 / 2 の前後でクロック過程、サインベータ過程、ポアソン過程と変化する。また、準位統計とは別に、与えられた区間上の固有値の数の漸近挙動を調べ、その漸近展開を決定した。減衰するカップリング係数を持つ作用素では類似の結果が得られるが、アルファ = 1 / 2 のときの準位統計や、状態密度の漸近挙動は若干異なる [2, 4, 7, 9, 11]。関連する話題として、ガウシアンベータアンサンブルの高温極限での準位統計の問題をランダムシュレーディンガー作用素の手法を用いて解析し、それがポアソン過程であることを示した [1]。さらに1次元拡散過程の関連する話題として、局所マルチンゲールであるがマルチンゲールにならないような拡散過程の特徴づけ [5]、ベッセル型拡散過程の漸近挙動 [3]、繰り上がり過程の性質 [6, 8, 10] などの研究も行った。

### 5. 主な発表論文等

[1] Fumihiko Nakano and Kahn Duy Trinh

Gaussian beta ensembles at high temperature : eigenvalue fluctuations and bulk statistics, *Journal of Statistical Physics*, **173**, no. 2 (2018) 295-321.

[2] Shinichi Kotani and Fumihiko Nakano,

Poisson statistics for 1d Schrödinger operators with random decaying potentials, *Electronic Journal of Probability* **22** (2017), no.69, 1-31. DOI: 10.1214/17,

[3] Yuuki Shimizu and Fumihiko Nakano,

On the asymptotic behavior of Bessel-like diffusions, *Tsukuba Journal of Mathematics* **41** No.1 (2017), 81-90.

[4] Fumihiko Nakano,

Fluctuation of density of states for 1d Schrödinger operators, *Journal of Statistical Physics* **166** (2017):1393-1404,

[5] Yuuki Shimizu and Fumihiko Nakano

A remark on conditions that a diffusion in the natural scale is a martingale, *Osaka Journal of Mathematics* **55** (2018), 385 - 391.

[6] Fumihiko Nakano and Taizo Sadahiro

A generalization of carries process and riffle shuffles, *Discrete Mathematics*, **339** (2016), pp. 974-991

[7] Fumihiko Nakano

Level statistics for one-dimensional Schrödinger operators and Gaussian beta ensemble, *Journal of Statistical Physics* **156** (2014), 66-93. DOI 10.1007/s10955-014-0987-x,

[8] Takahiko Fujita, Fumihiko Nakano and Taizo Sadahiro

A generalization of carries process, 26th International Conference on Formal Power Series

and Algebraic Combinatorics(FPSAC 2014), 61-69, Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science, Proceedings AT,

[9] Shinichi Kotani and Fumihiko Nakano  
Level statistics for the one-dimensional Schrödinger operators with random decaying potential, Interdisciplinary Mathematical Sciences Vol. 17 (2014)p.343-373.

[10] Fumihiko Nakano and Taizo Sadahiro  
A generalization of carries process and Eulerian numbers,  
Advances in Applied Mathematics 53 (2014) 28 - 43

[11] Shinichi Kotani and Fumihiko Nakano  
On the level statistics problem for the one-dimensional Schrödinger operator with random decaying potential, RIMS Kokyuroku Bessatsu, B45 (2014), 19 - 24.

〔雑誌論文〕(計 11 件)

〔学会発表〕(計 32 件)

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕  
出願状況 (計 0 件)

名称：  
発明者：  
権利者：  
種類：  
番号：  
出願年：  
国内外の別：

取得状況 (計 0 件)

名称：  
発明者：  
権利者：  
種類：  
番号：  
取得年：  
国内外の別：

〔その他〕  
ホームページ等

<https://researchmap.jp/read0052293/>

## 6 . 研究組織

### (1)研究分担者

研究分担者氏名：

ローマ字氏名：

所属研究機関名：

部局名：

職名：

研究者番号 (8 桁)：

(2)研究協力者

研究協力者氏名：南就将、上木直昌、貞廣泰造

ローマ字氏名：Nariyuki Minami, Naomasa Ueki, Taizo Sadahiro

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。