

平成 30 年 6 月 4 日現在

機関番号：32642

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2014～2017

課題番号：26400149

研究課題名(和文) 繰り上がり過程の研究

研究課題名(英文) A generalization of carries process

研究代表者

貞廣 泰造 (Sadahiro, Taizo)

津田塾大学・学芸学部・教授

研究者番号：00280454

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 1,900,000円

研究成果の概要(和文)：ランダムに生成される整数の足し算の繰り上がりの列をマルコフ連鎖とみなすことが出来る。このマルコフ連鎖の推移確率行列は固有値、固有ベクトルを表す閉じた式が存在する。このマルコフ連鎖を一般化したものについて、同様の公式を得ることが出来た。またこのマルコフ連鎖と一般化置換群の上のリップルシャッフルと呼ばれるマルコフ連鎖の間の関係について解き明かすことが出来た。

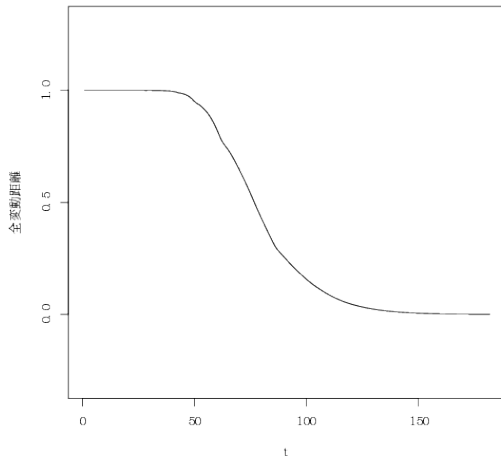
研究成果の概要(英文)：When we add randomly generated integers, the sequence of the carries can be considered as a Markov chain. The transition probability matrix of this chain exhibits some remarkable properties, the eigenvalues and eigenvectors can be represented explicitly. We generalize this Markov chain and obtained an explicit formula which represents the eigenvalues and eigenvectors. We found a relation between this Markov chain and the riffle shuffle on the colored permutation groups.

研究分野：有限マルコフ連鎖

キーワード：有限マルコフ連鎖 定常分布 混合時間 一般化置換群

1. 研究開始当初の背景

有限マルコフ連鎖は統計学や計算機科学におけるモンテカルロ法に用いられるため、実用上の重要性をもつ。特にその定常分布への収束の速度を評価することは計算の精度を保証するためにも重要である。しかし、そうした実用上の重要性とは別に以下のような理論的にみても自然で興味深い問題を提供する。まず、組合せ論や群の表現などと自然な関係を持ち、解析には、組合せ論や代数学の深い理論が用いられる。また、確率論からみても中心極限定理などとの関係から興味深い問題を提供する。特に興味深い問題として、カットオフ現象と呼ばれる現象がある。これは有限マルコフ連鎖の定常分布への収束を分布の全変動距離で測るとき、一様には進まずある時刻をすぎたところで急激に収束が進む現象を表す。下の図は100次の置換群上の top to random shuffle と呼ばれる有限マルコフ連鎖の定常分布への収束の様子を表した図である。



最初はなかなか収束が進まず100ステップを過ぎたあたりから急激に収束が進む様子が伺える。置換群の次数をさらに増やすことにより、この変化はさらに急激なものとなり、ちょうど相転移のような状態を生み出す。またカットオフ現象は中心極限定理と関係することがわかっており、確率論の理論上も興味深い問題となっている。

2. 研究の目的

ランダムに(各桁の数字が)生成された整数の足し算を行うとき、その繰り上がりの列は自然にマルコフ連鎖とみなすことができる。これを繰り上がり過程と呼ぶ。この性質を最初に詳細に調べたのは J.Holte 氏であり、推移確率行列の多くの興味深い性質が明らかにされた。その後、P.Diaconis 氏はこの性質がリップルシャッフルと呼ばれる対称群上のマルコフ連鎖と密接に関係することを明らかにした。リップルシャッフルにおける対称群の各元の descent と呼ばれる量がなす確率過程を考えると、これがマルコフ連鎖を

なししており、繰り上がり過程と実質的に同一であることを足される整数の列とカードの並びの列の間に明示的な全単射を構成することによって示した。申請者はベータ展開と呼ばれるある種の区間力学系について長期間研究を行ってきた。これは例えば2進展開や10進展開の一般化といえる数の表現法、記数法を与える。このため、申請者はすぐに繰り上がり過程をより一般の記数法のシステム上に拡張することを考えた。すぐに考えられる一般化として、例えば通常の3進法で用いられる各桁の数字は0,1,2であるが、これを-1,0,1などとすることによってどのようなことが起きるかについてどのようなことが起きるのか、またそれは通常の繰り上がり過程が対称群と関係したように、どのような群と関係するのか、そのようなことを明らかにすることを目的に本研究を計画した。

3. 研究の方法

定期的に連携研究者と打ち合わせの機会を持ち、また電子メール等でお互いの計算結果などについて情報を共有した。海外の研究会に出席して新しい情報の収集を行い、成果を学術誌や国際会議において発表した。これらの旅費に本助成金を用いた。

得られた結果の多くは計算機実験により、発見され証明された。これは研究計画にも強調して述べた通りであり、研究を推進する上で不可欠であった。

助成期間中の2015年度に勤務校の海外研修制度を利用してアメリカのマサチューセッツ工科大学において研修の機会を得た。マサチューセッツ工科大学でのホストはリチャード・スタンレー教授であった。リチャード・スタンレー教授は組合せ論の研究者として世界的に名高いが、有限マルコフ連鎖に関しても有名な成果をあげており、彼の大学院生向けの講義のなかで top to random shuffle やリップルシャッフルを統一して捉える左正則帯という有限半群の理論を用いたマルコフ連鎖の分析法が発展していることを知ることが出来た。この理論によると top to random shuffle もリップルシャッフルも超平面配置のチャンパーの集合上のランダムウォークとして捉えることが出来る。この方向での研究を開始したが、残念ながら期間中に成果を上げることは出来なかった。広いクラスのマルコフ連鎖に応用出来る美しい理論であり、その一般化が近年海外では進展しているが、このような方向性の研究は国内ではまったく知られていないように感じる。

4. 研究成果

b を絶対値が2以上の整数とする。展開に用いられる数字の集合をディジットセット D とする。D は0を含み連続する b 個の整数の集合とする。D の最小値が負であるか、b 自身が負であるとき任意の整数は D を係数とする

b進展開をただひとつもつ。このような表現についても足し算の”筆算”とその”繰り上がり”を自然に定義できる。このとき足される数のb進展開の係数であるDの元が独立に一樣ランダムに選ばれるとき、繰り上がりはやはりマルコフ連鎖であると解釈出来る。このマルコフ連鎖についてその推移確率行列の固有値と定常分布を含むすべての固有ベクトルを明示的に表示する公式を得ることが出来た。

通常の繰り上がり過程と異なるのは通常の繰り上がり過程の場合、定常分布が通常のオイラー数を用いて記述されるのに対して、上述のシステムにおいては、一般化されたオイラー数により記述される。つまり、通常のオイラー数は対称群のdescentの分布を表しているが、私達の発見した公式に現れるオイラー数に対応する数は符号付き置換群を含む一般化置換群(colored permutation)のdescentの分布を表す。この公式は計算機実験により予想され、線形代数と母関数のみを用いて証明された。

上述の結果を得た後、なぜ一般化置換群のdescentと足し算の繰り上がりが関係するののかについて研究を行った。結果として上述のように一般化された繰り上がり過程については一般化置換群上に対称群のリッフルシャッフルに相当するマルコフ連鎖を構成することが出来、そのマルコフ連鎖におけるdescentの列がやはりマルコフ連鎖となり、繰り上がり過程と同一の分布をもつことを具体的な全単射を構成することにより証明することが出来た。

以上の2点が重要な成果であり、いずれも論文として学術に公表することが出来た。

また論文として公表することが出来なかったが、一般化置換群の上のtop to random shuffleと呼ばれるより解析の易しいマルコフ連鎖についても研究を行った。この過程でカットオフ現象とStirling数の分布の中心極限定理が深く関係することがわかってきたが、最終的に論文として公表することが出来なかった。前述したように論文として発表できる成果を得られなかったがマルコフ連鎖を超平面配置上のランダムウォークや有限半群の上のランダムウォークとしてとらえる研究方法について期間中に知ることが出来た。今後の研究目標としており、2018年度の科学研究費助成事業として応募したが残念ながら採択には至らなかった。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計2件)

Nakano, Fumihiko, and Taizo Sadahiro. "A generalization of carries process and riffle shuffles." *Discrete Mathematics*、査

読あり、339.2 (2016): 974-991.

DOI:doi.org/10.1016/j.aam.2013.09.005

Nakano, Fumihiko, and Taizo Sadahiro. "A generalization of carries processes and Eulerian numbers." *Advances in Applied Mathematics*、査読あり、53 (2014): 28-43. DOI:doi.org/10.1016/j.disc.2015.10.025

[学会発表](計2件)

Fumihiko Nakano and Taizo Sadahiro. "Generalized carries process and riffle shuffle", Algebraic and Enumerative Combinatorics in Okayama

Fujita, Takahiko, Fumihiko Nakano, and Taizo Sadahiro. "A generalization of the carries process." *Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science*. Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science, 2014.(Proceedings of Formal PowerSeries and Algebraic Combinatorics 2014)

[図書](計0件)

[産業財産権]

出願状況(計0件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

取得状況(計0件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

[その他]
ホームページ等

6. 研究組織

(1)研究代表者

貞廣泰造(SADAHIRO, Taizo)
津田塾大学・学芸学部・教授
研究者番号：00280454

(2)研究分担者

()

研究者番号：

(3)連携研究者

石川雅雄 (ISHIKAWA, Masao)

岡山大学・大学院自然科学研究科・教授

研究者番号： 40243373

中野史彦 (NAKANO, Fumihiko)

学習院大学・理学部・教授

研究者番号:10291246

藤田岳彦 (FUJITA, Takahiko)

中央大学・理工学部・教授

研究者番号:50144316

(4)研究協力者

()