

平成 30 年 6 月 5 日現在

機関番号：15401

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2014～2017

課題番号：26400154

研究課題名(和文) 変動指数をもつ関数空間の先端的研究

研究課題名(英文) A new trend of function spaces with variable exponents

研究代表者

水田 義弘 (Mizuta, Yoshihiro)

広島大学・理学研究科・名誉教授

研究者番号：00093815

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,300,000円

研究成果の概要(和文)：身の回りに起きるさまざまな現象を、数学の理論を用いて解析するために、偏微分方程式を利用する。現象を記述する偏微分方程式を求めて、その解を解析することによって、現象の起因を説明するとともに将来予測が可能となる。偏微分方程式の解の存在や解の特性を調べるとき、本研究の主題である関数空間が重要な役割を果たす。

本研究において、Sobolev が開始した理論を発展させることによって、身の回りに起きる複雑な現象を解明するための数学的な方法を数多く与えることに成功した。この理論を継続・発展させることによって、さまざまな現象を解明し将来予測に結び付けることが大いに期待される。

研究成果の概要(英文)：To develop various phenomena surrounding our nature by applying Mathematical method, a theory of partial differential equation is used. To do so, our first task is to find partial differential equation describing phenomena and analyze solution of the equation. For this purpose, function spaces play an important role.

In our study, we extend the theory developed by Sobolev, which will be used to investigate various phenomena. It will be expected to give further development of our theory.

研究分野：potential theory

キーワード：function space variable exponent Sobolev theorem

### 1. 研究開始当初の背景

偏微分方程式の解の存在や正則性を調べる  
ときに、ソボレフが導入したソボレフ空間が  
最も重要な道具である。ソボレフ空間に関す  
る基本的な理論は

Yoshihiro Mizuta

"Potential theory in Euclidean spaces",  
Gakkotosho, Tokyo, 1996.

にまとめられている。

流動学や弾性学の研究において、変動指数  
をもつ偏微分方程式の解析が重要であるこ  
とが、Růžička による講義録にまとめら  
れている：

Electrorheological fluids : modeling and  
Mathematical theory, Lecture Notes in Math.  
1748, Springer, Berlin, 2000

この論文を基礎として、変動指数をもつ偏微  
分方程式の研究が盛んに行われ、多くの論文  
が発表されている。それらは、次の書籍にま  
とめられている：

L. Diening, P. Harjulehto, P. Hasto,  
M. Růžička,

Lebesgue and Sobolev spaces with variable  
exponents, Lecture Notes in Mathematics,  
vol. 2017, Springer-Verlag, Heidelberg,  
2011.

中野によるモジュラー空間の理論は変動  
指数をもつ関数空間の先駆的な研究である。  
その後、わが国における変動指数をもつ関数  
空間の研究者は多いとはいえないが着実に  
成果をあげている。国外では、フィンランド  
の研究グループを中心として、中野によるモ  
ジュラー空間の理論から変動指数をもつ関  
数空間へと活発に研究が行われている。

さらに、変動指数をもつ偏微分方程式の研究  
が世界規模で行われており、変動指数をもつ  
関数空間の理論が重要な道具となっている。  
調和解析における最もよい道具は極大関数  
である。とくに、ルベグ空間における極大  
関数の積分性が重要である。Diening は変動  
指数をもつルベグ空間にまで拡張し、変動  
指数をもつ偏微分方程式の研究に新風を吹  
き込んだ。変動指数  $p$  が  $\log$ -ヘルダー連続  
であるとは、 $|x-y| < 1/2$  のとき、  
 $|p(x)-p(y)| \leq \log(1/|x-y|)$   
が有界であるときをいう。

### 2. 研究の目的

偏微分方程式の解の存在や正則性を調べる  
ときに、ソボレフが導入した関数が重要な役  
割を果たす。近年になって、流動学や弾性学  
の研究において、変動指数をもつ偏微分方程

式の研究が盛んに行われている。この研究を  
さらに発展させるためには、レベグの  $L^p$   
関数空間ばかりでなく、変動指数をもつさま  
ざまな関数空間の理論を構築しておくこと  
が重要である。そこで、本研究の目的は、変  
動指数をもつさまざまな関数空間に対応し  
て、ソボレフの不等式、Trudinger の指数不  
等式、ヘルダー連続性などに関するソボレフ  
型定理を拡張・発展させることを目的とした  
研究を行う。

Herz, Morrey, Musielak, Orlicz などが導  
入した関数空間を結び付けて、一般化された  
Orlicz 空間を構築し、極大作用素の積分性  
を示し、その応用として、積分作用素の有界  
性を証明する。

### 3. 研究の方法

身の回りに起きる複雑な現象を解明するた  
めには、偏微分方程式の研究が有効である。  
偏微分方程式の解の存在や正則性を論じる  
とき、ソボレフが導入した関数空間、いわゆ  
るソボレフ空間、が重要な役割を果たしてい  
る。最近では身の回りに起こる現象がます  
ます複雑となり、それに伴って、その現象を記  
述する偏微分方程式とそれを解明するた  
めに関数空間が多様化している。本研究では、  
さまざまな関数空間の性質を解明すること  
により、変動指数をもつ偏微分方程式の研究  
を発展させる。この研究を遂行するために、  
国内の研究者ばかりでなく海外の研究者と  
積極的に研究交流を行う。

### 4. 研究成果

$\log$ -ヘルダー条件を満たす変動指数をもつ  
関数空間において、極大作用素の有界性につ  
いて研究した。その応用として、ソボレフの  
定理について重要な成果を得た。その基本的  
な理論について、2017年3月に開催された日  
本数学会年会企画特別講演において報告し  
た。また、2018年2月に数理研で開催された  
研究会でも発表した。

Herz, Morrey, Orlicz が導入した関数空間  
を一般化した空間

$H^{\Phi, q, \omega}$

を構築する。ここに、 $\Phi$  は Orlicz 関数、 $\omega$  は重みで  $L^q$  空間上で定義された空間である。リースポテンシャル  $I_\alpha f$  に対するソボレフの不等式とは

$$\|I_\alpha f\|_{L^q} \leq C \|f\|_{L^p}$$

$$\|f\|_{L^p} \leq C \|I_\alpha f\|_{L^q}$$

の形の不等式をいう。Herz-Morrey-Orlicz 空間において、極大作用素や Hardy 作用素の有界性を利用して、リースポテンシャルに対するソボレフの不等式を示した。

さらに、偏微分方程式論などへの応用を目指して、Herz-Morrey-Orlicz 空間の双対空間が Herz-Morrey-Orlicz 空間であることを示した。

リース分解定理によると、優調和関数はポテンシャルと調和関数に分解される。孤立特異点の近くでリース分解定理を得るためにはポテンシャルと修正する必要がある。孤立特異点をもつ優調和関数の孤立点の周りでの球面平均の増大度に応じてポテンシャルを修正してリース分解定理を示すことができた。さらに、その修正されたポテンシャルと調和関数の孤立点付近での正確な振る舞いを示すことができた。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

〔雑誌論文〕(計 4 件)

1. Yoshihiro Mizuta, Takao Ohno, Tetsu Shimomura and Yusuke Yamauchi, Growth properties near the origin for generalized Riesz potentials, J. Math. Anal. Appl. 454 (2017), 285-302. 査読有

2. Yoshihiro Mizuta,

Function spaces with variable exponents [translation of MR3114272].

Sugaku Expositions 29 (2016), no. 2, 227-248. 査読有

3. Yoshihiro Mizuta and Takao Ohno, Sobolev's inequality for Riesz potentials in Lorentz spaces of variable exponent,

J. Math. Soc. Japan 67, No. 2 (2015), 433-452. 査読有

4. Yoshihiro Mizuta and Takao Ohno, Boundedness of the maximal operator and Sobolev's inequality on non-homogeneous central Herz-Morrey-Orlicz spaces, Nonlinear Anal. 128 (2015), 325-347. 査読有

〔学会発表〕(計 2 件)

1. 水田 義弘

日本数学会 年会 企画特別講演

“変動指数をもつ関数空間”,

2017 年 3 月 26 日

2. 水田 義弘

数理解析研究所

「関数空間の構造とその周辺」

(The structure of function spaces and its environment)

2017 年 2 月

“Growth properties for generalized Riesz potentials in central Herz-Morrey spaces”

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕

出願状況 (計 0 件)

名称:

発明者:

権利者:

種類:

番号:

出願年月日:

国内外の別:

取得状況 (計 0 件)

名称:

発明者:

権利者:

種類:

番号:

取得年月日:

国内外の別:

〔その他〕

ホームページ等

6. 研究組織

(1) 研究代表者

水田 義弘 (MIZUTA, Yoshihiro)

広島大学・理学研究科・名誉教授

研究者番号： 00093815

(2)研究分担者

山内 雄介 (YAMAUCHI, Yusuke)

広島工業大学・工学部・准教授

研究者番号： 00451435

小山 哲也 (KOYAMA, Tetsuya)

広島工業大学・工学部・教授

研究者番号： 50170402

大野 貴雄 (OHNO, Takao)

大分大学・教育学部・准教授

研究者番号： 40508511

(3)連携研究者

( )

研究者番号：

(4)研究協力者

( )