

令和元年6月10日現在

機関番号：12301

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2014～2018

課題番号：26400157

研究課題名(和文)非等方弾性体における波動現象の漸近解析と逆問題

研究課題名(英文) Asymptotic analysis for wave propagation in anisotropic elasticity and inverse problems

研究代表者

田沼 一実 (Tanuma, Kazumi)

群馬大学・大学院理工学府・教授

研究者番号：60217156

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,800,000円

研究成果の概要(和文)：弾性体を伝わる波は、その弾性体の性質を反映する。弾性体の非等方性(対称性からのずれ)と非斉次性(空間依存性)が弾性表面波(Rayleigh波)の挙動に及ぼす影響を明らかにするため、伝播速度、および弾性表面波によって励起される変位場に対して、それらの斉次等方弾性体における値からのずれを表す摂動公式と、伝播速度の周波数依存性を表す漸近展開式(分散公式)とを導いた。弾性波動方程式の数学解析を通じて、各公式への非等方性・非斉次性の寄与の仕組みを明確にした。この順問題解析の結果を基礎に、非等方性・非斉次性を表す弾性パラメータが未知のときに、それらを弾性表面波の挙動から決定する逆問題に指針を与えた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

本研究は、非等方性・非斉次性の同定(例として残留応力の非破壊評価)という多分野にわたる重要問題への、弾性波動方程式の数学解析によるアプローチであり、力学、数理物理、工学等の分野との接点を視野に入れた応用解析学からの貢献の一例である。弾性パラメータを決定する逆問題では、順問題解析のアルゴリズムをくり返し解くことで最適解を求める手法を適用するため、方程式のパラメータが解にどのように組み込まれていくかを追求する、精緻な順問題解析が必要となった。逆問題解析側の要請から順問題解析の発展が促される局面が提示できたことも、本研究の特色である。

研究成果の概要(英文)：Elastic waves carry much information on the properties of the medium along which they propagate. In this research project we consider elastic surface waves (Rayleigh waves) which propagate along the surface of an anisotropic inhomogeneous elastic half-space. We give a perturbation formula for the velocity and for the polarization of the boundary displacements of Rayleigh waves, as caused by the anisotropy of the medium. We also give a high-frequency asymptotic formula for the velocity which expresses the frequency-dependence of the Rayleigh-wave velocity, i. e., the dispersion of Rayleigh waves, as caused by the inhomogeneity of the medium. These results allow us to investigate how anisotropy and inhomogeneity of the medium affect the velocity and the polarization of Rayleigh waves, and can be applied to the inverse problems of determining the anisotropy and the inhomogeneity of the medium when they are unknown from boundary measurement of velocities and polarizations of Rayleigh waves.

研究分野：応用解析学

キーワード：非等方弾性体 弾性波動方程式 弾性表面波 Rayleigh waves 分散 dispersion 摂動 perturbation 残留応力 逆問題

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19、CK - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

弾性波は、それが伝播する弾性体の性質を反映する。弾性波の観測により、弾性体に含まれる未知の性質、たとえば加工過程で弾性体内部に生じた残留応力、弾性体内部の介在物、あるいは弾性体自身の非等方性、非斉次性を決定する試みは、材料力学、地球物理等の分野で長く研究されてきた重要なテーマである。一方、数学解析においてこれらの問題は、微分方程式に未知のパラメータが含まれているときに、方程式の解に関わる何らかの情報からそのパラメータを決定する逆問題として定式化される。しかし弾性体方程式とくに非等方弾性体方程式については、方程式自体が連立系となること、方程式の係数が最大 21 個の独立成分をもつ弾性テンソルからなることにより、逆問題解析は格段に難しくなる。

研究代表者はこれまで、弾性波の観測により弾性体の非等方性を決定する逆問題に動機づけられ、弾性体の自由境界表面の近傍を亜音速域で伝播する弾性表面波 (Rayleigh 波) を数学解析の対象としてきた。Rayleigh 波は弾性波動方程式の特殊解の一つとして表現され、境界表面に振幅が集中し伝播距離に比して減衰が少ないため、実用面にて正確に計測できる利点がある。研究代表者等は、順問題解析の立場から、弾性テンソルおよび残留応力は領域内で一定と仮定し(このとき弾性体(弾性テンソル)は“斉次”であるという)、直交異方性弾性体から微小に弾性テンソルが摂動した場合、および微小な残留応力が発生した場合に Rayleigh 波の速度が、直交異方性弾性体のときの速度からどのように変化するかを一次摂動公式にて表現した。つぎにこの一次摂動公式をもちい、横等方弾性体の等方を伝播する Rayleigh 波の速度から、残留応力の主軸方向と主応力を決定する逆問題アルゴリズムを提示した。(Mathematics and Mechanics of Solids, 18(2013), 301-322)

一方、弾性体の斉次条件は近似理論としては有用であるが、弾性テンソルと残留応力が領域内で微小に変化していて、その変化を弾性波の観測から同定したい場合、上記の一次摂動公式は適用できない。残留応力は弾性体の強度に深く関わる。例えば表面近傍では圧縮応力が、表面から深さ方向に離れるにつれて引っ張り応力が生じるように残留応力を制御することで、弾性体の強度を増大することができる。このため、弾性体における残留応力を同定する非破壊検査では、残留応力を表面からの深さの関数として表現することが重要になる。また、自由境界面を持つ弾性体とみなした地球の内部構造が深さ方向に変化している場合などは、現実のモデルとして当然でありながら斉次条件の下での結果は適用できない。以上より、弾性体の斉次条件を緩めることは、数学解析上興味ある問題であると同時に、逆問題への定式化を試みる場合に不可欠との認識に至った。

他方、弾性テンソルが空間変数に依存する弾性体においては(このとき弾性体(弾性テンソル)は“非斉次”であるという)、Rayleigh 波の速度はその周波数に依存する。これは Rayleigh 波の分散現象として知られており、これまで多くの観測、数値実験、そして分散現象を観測することにより弾性体の性質を同定する逆問題解析への応用が研究されてきた。(例えば Aki and Richards, Quantitative Seismology 2nd ed, University Science Books, 2002 および Man et al., Review of Progress in Quantitative Nondestructive Evaluation (2000)等)。しかしながら、そこではそれぞれの弾性体に固有な技巧的な方法ももちい、系統的解析方法が使われているとは言い難い。非等方弾性体における分散現象の厳密な数学解析は、まだ完成されていなかった。このような状況を克服する一歩として、研究代表者等は半無限非等方弾性体に対する弾性波動方程式において、弾性テンソルが自由境界面からの深さ方向の関数であると仮定し Rayleigh 波を記述する時間周期的な漸近解を構成し、Rayleigh 波速度に対する分散公式 (Rayleigh 波速度を周波数の漸近展開式で表現したもの) を導出する一般的手順を与えた (IMA Journal of Applied Mathematics, 80(2015), 47-84)。

2. 研究の目的

弾性体の非等方性(弾性的性質の回転依存性、対称性からのずれ)と非斉次性(弾性的性質の空間依存性)が弾性表面波の挙動にどのように影響するかを明らかにするため、弾性表面波の速度の、周波数に関する漸近展開式(分散公式)を考察対象とする。弾性波動方程式の数学解析を通じて、展開式各項は弾性体の非等方性によってどのような摂動を受けるかその規則性を見出し、また展開式各項は弾性体の非斉次性からどのような影響を受けるかを明確にする。以上の順問題解析の結果を基

礎に、弾性波の挙動から弾性体の非等方性と非斉次性を決定する逆問題に対して、再構成アルゴリズムを構築し、応用数学、力学、数理物理、工学などの多分野において重要な逆問題に系統的な解析手法を確立する。

3. 研究の方法

弾性体の非等方性・非斉次性に起因する弾性波動の摂動と分散に対する漸近解析手法の確立のため、海外共同研究者とのこれまでの共同研究における手法の応用、発展を図る一方、弾性体方程式固有の基本量 surface impedance matrix を活用する。残留応力と組織異方性を考慮した工学的見地からも適切な弾性体モデルの把握が必要となるため、またそのモデルの下で弾性体の非等方性・非斉次性の再構成問題を考察するため、研究打ち合わせを目的に海外共同研究者を訪問する。対象の弾性体は多くのパラメータを含むので、摂動・分散公式の導出と再構成アルゴリズムの構築の際には、数式処理と数値計算を随時援用する。

非等方性を扱う弾性体力学においては、非等方性を特徴づける弾性テンソルのみをとっても多くの成分を有し、それらすべての成分に対して再構成の公式を与えることは難しい。そこで、弾性パラメータが弾性波の挙動へ寄与する仕組みを明らかにする順問題解析を完成させ、そのアルゴリズムを数式処理・数値計算にて与え、予測初期値から順問題を数値的にくり返し解くことで未知パラメータの最適解を求める手法をとる。そこでは、方程式の解の存在、一意性、適切性といった順問題解析における従来の取り組みだけでは全く不十分であり、方程式のパラメータが解にどのように組み込まれていくかを追求する、より精緻な順問題解析が必要となる。このように、順問題解析と逆問題解析とを密接に関連させながら研究を進める。

4. 研究成果

(1) 弾性テンソルが斉次の等方テンソルから非斉次の非等方テンソルに微少に摂動した場合に、さらに非斉次の微少な残留応力が加わった場合に、Rayleigh 波速度の分散公式導出の手続きを与えた。Rayleigh 波速度は、境界面での変位と表面力との線形関係をあらわす surface impedance 行列の特異点となるため、この行列の周波数-漸近展開式の各項に対して、その摂動を計算することがポイントとなる。主なる具体的成果として以下があげられる。

1 surface impedance 行列の周波数-漸近展開式の主要項の摂動公式を導いた。これは斉次の等方弾性体に斉次の非等方テンソルと残留応力が摂動として加わった弱非等方弾性体の surface impedance 行列に対応する。

2 surface impedance 行列の周波数-漸近展開式の第2項以下を、1で求めた主要項の摂動公式と、非斉次の非等方テンソルおよび残留応力の境界法線方向微分係数とをもちいて、Lyapunov 方程式系とよばれる連立線形方程式より帰納的に求める手続きを提示した。

3 以上により、surface impedance 行列の周波数-漸近展開式における任意の高階項を、弾性テンソルおよび残留応力テンソルより導出する手続きを提示した。つぎに、陰関数定理を surface impedance 行列の特異点にもちいることで、Rayleigh 波速度の分散公式を引き出し、分散公式への弾性テンソルの非等方成分、および残留応力成分の寄与における法則性を提示することができた。

非等方性と残留応力を有する弾性体において、Rayleigh 波速度の分散現象に対する数学解析は、対応する弾性波動方程式が多くのパラメータを含む連立系であることにより、国内外において系統的研究がほとんどなされていないのが現状であった。他方、分散現象は多くの実例で観測され、その数理構造の解明と逆問題への応用の系統立てた研究が俟たれていた。このような背景の下で、本研究は弾性波動方程式の純数学的解析から出発し、一つの系統的アプローチを与える点で重要である(〔雑誌論文〕の2,3,〔学会発表〕の10,11,12)。

(2) 深さ方向に変化する残留応力を含む弱非等方弾性体において、Rayleigh 波速度の分散曲線(速度対周波数のグラフ。Rayleigh 波の観測データとして使われる)から残留応力を再構成する逆問題に一つの解法を提示した。主なる具体的成果は以下の通りである。

1 境界面からの深さを変数とする多項式で表現した残留応力より、(1)での分散公式導出の方法をもちいて分散曲線の理論値を求め、一方、観測データである分散

曲線と比較することで、最初に設定した残留応力の多項式係数を修正し、この手続きをくり返すことで最適な残留応力の多項式を決定した。

2 前述の残留応力の多項式係数は線形方程式をくり返し解くことで決定される。これは(1)での分散式の各項が、残留応力の最高次の深さ方向微分係数に関して1次式であることに起因するものであり、分散式の各項を能率よく計算するときの大きな強みとなった。

以上の成果は、(1)と合わせ、残留応力の非破壊評価という工学上重要な問題への、さらには非等方性と非斉次性の同定という多分野にわたる重要かつ切実な問題への数学解析によるアプローチであることに意義があり、他分野との接点も視野に入れた応用解析学における貢献の一例といえる(〔雑誌論文〕の1,〔学会発表〕の11,12)。

(3) 等方弾性体の自由境界面に横波(S波)を入射した場合、反射波としてS波および縦波(P波)が生じ、さらには入射角が臨界角を超えると表面波も励起される。そこで斉次な弱非等方弾性体において、その非等方性が反射波にどのように影響を及ぼすかを考察するため、反射波の位相速度、伝播方向、変位の偏りに対して、非等方パラメータに関する漸近展開式を導出する手続きを提案した。各漸近展開式の第1項は等方弾性体の前述物理量に対応するが、各漸近展開式の第2項に対する非等方パラメータの寄与の仕組みを明確にした(〔学会発表〕の8,9)。弾性波の境界反射は弾性体の波動現象では無視できないテーマである。非等方性を微少パラメータとする漸近解析は、研究開始時点では予測できなかった手法であるが、本研究は、非等方性を有する弾性体における波動現象に対する順問題解析と、非等方性を同定する逆問題解析に対して、Rayleigh波以外の波動現象をもちいる1つのアプローチとして意義が期待される。

(4) 斉次な直交異方弾性体に、残留応力あるいは他の非等方性による微少な摂動を与えた場合に、Rayleigh波の境界表面における変位場の摂動について、順問題解析と逆問題への応用を行った。具体的な成果とその位置づけは以下の通り。

1 Rayleigh波によって励起される境界表面における変位場の、伝播方向成分と境界法線方向成分との比(polarization ratio)に対して、摂動前の状態(直交異方弾性体)のときからの変化を一次摂動公式として表示し、残留応力および弾性テンソルの寄与を成分ごとに明確にした(〔学会発表〕の4,5,6,7)。

2 弾性体に含まれる残留応力、非等方性を同定する逆問題において、これまでRayleigh波の観測量として伝播速度をもちいることが一般的であったが、本研究は、同時に観測できる物理量としてpolarization ratioをもちいることを提案するものである。非等方弾性体においては同定すべきパラメータは多岐にわたるため、観測できる物理量は多いほどよい。さらには、単軸応力を残留応力として与えた場合、伝播速度とpolarization ratioそれぞれの相対変化率を比較すると、polarization ratioの相対変化率の方が数～十数倍大きいことが、代表的な弾性材料(アルミニウム、鋼、銅、真鍮等)において計算されている(Junge et al. Ultrasonics (2006))。すなわちpolarization ratioは残留応力、非等方性に対して敏感なことが示唆されている。

1の結果は、Rayleigh波に付随する観測量として、伝播速度とともにあげられる変位場のpolarization ratioについて、非等方パラメータおよび残留応力がどのように組み込まれているかを追求する精緻な順問題解析に対応する。さらには、弾性体が非斉次の場合、polarization ratioの分散現象を周波数の漸近展開式(分散式)で記述し、逆問題解析においては前述の(2)におけるように、順問題解析の具体的手順を数式処理で与え、その上で未知の非等方パラメータおよび残留応力の予測初期値から順問題を数値的にくり返し解いて、最適解を求める再構成アルゴリズムが構築できることが今後期待される。本研究はそのための第一歩である。非等方性と残留応力を有する弾性体は、順問題解析と逆問題解析ともにその系統的研究が俟たれるところであるが、本研究はpolarization ratioなる新しい観測物理量を通して弾性波動方程式の数学解析によるアプローチを与える点で意義がある。

(5) 圧電体方程式は、弾性・圧電・誘電テンソルを係数にもつ4つの方程式の連立系となり、非等方弾性体方程式と比べて複雑であるが、弾性場と電場との相互作用

用をもたらす圧電効果ゆえ、圧電材料の開発等に応用は広い。圧電体が横等方性を有するとき、Bleustein Gulyaev 表面波 (BG 波) が存在するが、その伝播速度は圧電テンソルの 1 成分のみに依存するため、BG 波が有する圧電パラメータに関する情報は少ないといえる。そこでまず順問題解析の立場から、斉次な圧電体において圧電・弾性・誘電テンソルが横等方な状態から任意の非等方な状態に摂動した場合に、圧電体方程式の表面波解の構造を吟味することで、表面波速度が BG 波速度からどのように変化するかを一次摂動公式にて表現することを目標とした。非等方弾性体方程式に対する Stroh formalism を拡張・応用することで、表面波速度の一次摂動公式の導出についての見通しを招待講演、国際学会にて発表した ([学会発表] の 1, 2, 3)。これまで系統的研究がほとんどなされていなかった圧電体方程式の数学解析により、各テンソルの成分ごとの表面波挙動への寄与について明確な数学表現を与え、逆問題解析に進展させる点に今後意義が期待される。本研究は当研究課題の開始時点では計画していなかった内容であるが、(1) ~ (4) の研究中に、これまで非等方弾性体方程式の系統的数学解析を可能にしてきた Stroh formalism が圧電体における表面波速度の摂動問題に適用できると認識し、開始したものである。

5. 主な発表論文等

[雑誌論文](計 3 件)

1. Yue Chen, Chi-Sing Man, Kazumi Tanuma, Christopher M. Kube, Monitoring near-surface depth profile of residual stress in weakly anisotropic media by Rayleigh-wave dispersion, *Wave Motion*, **77** (2018), pp.119-138, (査読有り) DOI: 10.1016/j.wavemoti.2017.10.008
2. Kazumi Tanuma, Chi-Sing Man and Yue Chen, Dispersion of Rayleigh waves in weakly anisotropic media with vertically-inhomogeneous initial stress, *International Journal of Engineering Science*, **92** (2015) pp. 63-82, (査読有り) DOI: 10.1016/j.ijengsci.2015.03.001
3. 田沼一実, Chi-Sing Man, Yue Chen, 中村玄, 深さ方向に非斉次な非等方弾性体における Rayleigh 波速度の分散, 第 63 回理論応用力学講演会講演論文集, OS07-03-03, 2014 年 (査読なし)

[学会発表](計 12 件)

1. Kazumi Tanuma, Xiang Xu and Gen Nakamura, Perturbation formula for phase velocity of Bleustein-Gulyaev waves in piezoelectric media, RIMS Workshop on Inverse problems for partial differential equations and related areas, 2019.
2. Kazumi Tanuma, Xiang Xu and Gen Nakamura, Perturbation of Bleustein-Gulyaev waves in piezoelectric media, International Workshop on Inverse Problems for Partial Differential Equations, 2018.
3. Kazumi Tanuma, Chi-Sing Man, Xiang Xu and Gen Nakamura, On the perturbation of surface waves in anisotropic elastic media and in piezoelectric media, 18th International Conference, CoMFos18: Mathematical Analysis of Continuum Mechanics II, 2018.
4. Kazumi Tanuma and Chi-Sing Man, Polarization ratio of Rayleigh waves in anisotropic elastic media, 9th International Conference, Inverse Problems: Modeling and Simulation, 2018.
5. Kazumi Tanuma, Perturbation of the polarization ratio of Rayleigh waves in anisotropic media --- a possible advantage of using Rayleigh-wave polarization rather than wave speed in nondestructive evaluation, Japan-Taiwan Joint Workshop on Inverse Problems, 2017.
6. 田沼一実, Chi-Sing Man, Perturbation of polarization ratio of Rayleigh waves in anisotropic media with orthorhombic principal part, 現象解析特別セミナー第 11 回, 2017 年
7. Kazumi Tanuma and Chi-Sing Man, Perturbation of polarization ratio of Rayleigh waves in anisotropic media with orthorhombic principal part, RIMS Workshop on Inverse problems for partial differential equations and

- related areas, 2017.
8. Kazumi Tanuma, Reflection of body waves and generation of surface waves at the free surface of a weakly-anisotropic homogeneous elastic half-space, Taiwan-Japan Joint Workshop on Inverse Problems 2016, 2016.
 9. 田沼一実, Reflection of body waves at the free surface of a weakly-anisotropic homogeneous elastic half-space, 現象解析特別セミナー第9回, 2016年
 10. 田沼一実, On the surface impedance matrix for surface waves in a weakly anisotropic elastic half-space, 現象解析特別セミナー第7回, 2015年
 11. 田沼一実, 非等方弾性体における表面波の分散と摂動, 日本応用数理学会研究部会「連続体力学の数理」研究集会, 2014年
 12. 田沼一実, Chi-Sing Man, Yue Chen, 中村玄, 深さ方向に非斉次な非等方弾性体における Rayleigh 波速度の分散, 第63回理論応用力学講演会 オーガナイズドセッション: 波動現象の数理とその応用, 2014年

6. 研究組織

(1)研究協力者(海外共同研究者)

研究協力者氏名: Chi-Sing Man (アメリカ合衆国ケンタッキー大学・教授)