

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 29 年 6 月 15 日現在

機関番号：13601

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2014～2016

課題番号：26400161

研究課題名(和文) 振動型積分作用素理論とその量子場のFeynman経路積分への応用

研究課題名(英文) The theory of oscillatory integral operators and its application to the Feynman path integral of quantum field theory

研究代表者

一ノ瀬 弥 (ICHINOSE, Wataru)

信州大学・学術研究院理学系・教授

研究者番号：80144690

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,700,000円

研究成果の概要(和文)：(1)無限の過去・未来を可算無限回行き交う相対論的電子の経路からなる空間上の、Feynman経路積分の数学的構成を行った。これにより、電子の第2量子化、即ち同時刻に可算無限個の電子・陽電子を導入することが、経路積分理論で可能であることを示した。(2)(1)で構成した経路積分が、相対論的に不変であること、即ちLorentz変換に対するspinor性を持つことを示した。(3)相対論的電子の確率振幅がユニタリ性・因果性を持つことを、経路積分から直接証明した。(4)空間方向に多項式オーダーで増大するポテンシャルを持つSchroedinger方程式に対する、Feynman経路積分の数学的構成を行った。

研究成果の概要(英文)：(1) We have constructed the Feynman path integral for a relativistic electron in the form of the sum-over-histories, over all paths of one electron in space-time that goes in any direction at any speed, forward and backward in time, especially with a countably infinite number of turns. By this result we have succeeded in introducing a countably infinite number of electrons and positrons at the same time in the theory of the Feynman path integrals as the 2nd quantization of one electron. (2) We have showed that the Feynman path integral defined in (1) is relativistically invariant, i.e. has the property of spinor under the Lorentz transformations. (3) We have showed directly from the Feynman path integral that the probability amplitude for a relativistic electron has the properties of both unitarity and causality. (4) We have constructed mathematically the Feynman path integral for the Schroedinger equations with potentials growing polynomially in the spatial direction.

研究分野：偏微分方程式論

キーワード：Feynman 経路積分 Dirac 方程式 量子電磁気学 Schroedinger 方程式 量子力学

## 1. 研究開始当初の背景

量子電磁気学とは、量子化された電子・陽電子・光子(量子化された電磁場)の相互作用を記述し、荷電粒子と光子の両方の運動を記述するものである。量子電磁気学では、電子と陽電子の対生成・対消滅が起こる。

1948年 Feynman は、従来の Schroedinger 方程式による量子力学の定式化と全く異なる、経路積分による新しい定式化の方法を提唱した。この経路積分による定式化の方法は量子電磁気学に適用され(1949,1950)、Feynman は朝永・Schwinger と共にノーベル賞を受賞した。Feynman・朝永・Schwinger の理論は同等であることが示されている(Dyson 1949)。特に、経路積分による定式化では陽電子は時間に逆行する電子として導入されるなど、経路積分による方法は直観的で分かり易い。このため、Feynman の方法が現在場の量子論で広く用いられている。

一方、経路積分の数学的取り扱いの困さは長い間、多くの数学者・物理学者から指摘されてきた。例えば、現ニューヨーク大学・深谷賢治教授も、現代数学の広がり I (岩波現代数学の基礎 1996) でこのことを指摘している。

場の量子論の経路積分の主な数学的研究として、以下のものがある。

- (1) Nelson (Princeton 大学 1964)は、荷電粒子が scalar 場と相互作用する非相対論場の虚時間経路積分の研究を、Markoff 過程を用いて行った。しかし量子電磁気学では、荷電粒子は scalar 場ではなく、vector 場と相互作用している。
- (2) Simon (Princeton 大学 1974), Glimm (New York 大学) - Jaffe (Harvard 大学) (1981)は、自由な(電磁場がない)相対論的ボゾン場の虚時間経路積分の研究を、Gauss 過程を用いて行った。

- (3) Albeverio (Bonn 大学) - Hoegh-Krohn (Oslo 大学)(1977, 2008)は自由な相対論的ボゾン場の Feynman 経路積分の研究を、Hilbert 空間上の Fresnel 積分を用いて研究した。
- (4) 廣島(九州大学 1997)は、ただ1個の電子が電磁場と相互作用する非相対論的量子電磁気学を考え、これの虚時間経路積分を考察した。
- (5) 本研究代表者は、任意個の電子が電磁場と相互作用する非相対論的量子電磁気学の Feynman 経路積分の数学的構成を、振動型積分作用素理論を用いて行なった(2010)。
- (6) 本研究代表者は、電子が電磁場と相互作用する相対論的量子力学の、即ち Dirac 方程式に対する、Feynman 経路積分の数学的構成を、振動型積分作用素理論を用いて行なった(2014)。

経路についての古典力学の作用を  $S$  とする。Feynman 経路積分とは、全ての経路について  $\exp iS$  の和を取る(積分)ものである(重ね合わせの原理)。これは、本質的な要請である。この意味で、Albeverio - Hoegh-Krohn の論文と本研究代表者の論文のみが、本来の Feynman 経路積分を研究していることになる。

## 2. 研究の目的

- (1) 量子力学に対する Feynman 経路積分の研究。 Schroedinger 方程式・Dirac 方程式に対する Feynman 経路積分の数学的構成について、従来の結果を拡張するのが、目的である。
- (2) 相対論的量子電磁気学の Feynman 経路積分の研究。 相対論的電子を、Dirac 方程式に対応する経路積分を用いて第2量子化し、相対論的量子

電磁気学の Feynman 経路積分の数学的構成を行う。摂動論の場の量子論は、繰り込み理論が非常に複雑である。この研究は、摂動論を用いない場の量子論を、経路積分を用いて展開するのが目的である。

### 3. 研究の方法

擬微分作用素などの振動型積分作用素の実解析的研究を用いて、Schroedinger 方程式・Dirac 方程式・相対論的量子電磁気学の Feynman 経路積分の数学的研究を行う。

この研究課題達成を以下の方法で行う。

- (1) 京都大学大学院人間・環境学研究科、大阪大学大学院理学研究科等の国内の大学研究者、及びイタリア Torino 大学、カナダ York 大学等の国外の大学研究者から、振動型積分作用素に関する知識・技術の協力を得て行う。
- (2) 学習院大学理学部、工学院大学等の国内の大学研究者、及びドイツ Bonn 大学、イタリア Trento 大学等の国外の大学研究者から、Feynman 経路積分に関する知識・技術の協力を得て行う。
- (3) 京都大学大学院理学研究科、立命館大学等の国内の大学研究者から、Dirac 方程式に関する知識・技術の協力を得て行う。
- (4) 九州大学大学院数理学府、北海道大学大学院理学研究科等の国内の大学研究者から、摂動論に依らない場の理論に関する知識・技術の協力を得て行う。

### 4. 研究成果

上記 2. 「研究の目的」に応じて 3 年間に渡る研究を行い、以下の研究成果を得た。研究成果は、全て学会で発表・発表予定である。

論文も、全て投稿済み・投稿中・投稿準備中である。

- (1) 無限の過去・未来を可算無限回行き交う相対論的電子の経路からなる空間上の、Feynman 経路積分の数学的構成を行った。これにより、電子の第 2 量子化、即ち同時刻に可算無限個の電子・陽電子を導入することが、経路積分理論において可能であることを示した。
- (2) 研究成果(1)で構成した経路積分の相対論的不変性を示した。即ち、Feynman 経路積分が、Lorentz 変換に対する spinor 性を持つことを示した。
- (3) 相対論的電子の確率振幅が、ユニタリ性・因果性を持つことを、経路積分から直接証明した。即ち Dirac 方程式の解がユニタリ性・因果性を持つことを、偏微分方程式論を用いずに直接証明した。
- (4) 空間方向に多項式オーダーで増大するポテンシャルを持つ Schroedinger 方程式に対する、Feynman 経路積分の数学的構成を行なった。この問題は、経路積分理論における懸案の問題であった。本研究でこれに最終的な結果を与えた。

### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 4 件)

1. W. Ichinose, 査読無し、Notes on the Feynman path integral for the Dirac equation, arXiv. org 1705.040040, March (2017),1-29.
2. I. Sasaki and A. Suzuki, 査読有り、Essential spectrum of the discrete Laplacian on a perturbed periodic graph, J. Math. Anal. Appl.

446(2017), 1863-1881. DOI:org/10.1016/j.jmaa.

3. W. Ichinose, 査読無し、On the construction of the Feynman path integral for the Dirac equation, RIMS Kokyuroku, Vol. 1958, July (2015), 63-80.
4. F.Hiroshima and I.Sasaki, 査読有、Enhanced binding of an N-particle system interacting with a scalar field II. Relativistic version, Publ. RIMS. 51(2015), 655-690. DOI:10.4171/PRIMS/168

[学会発表](計 11 件)

1. I. Sasaki, Embedded eigenvalue and von Neumann-Wigner potential for the relativistic Schroedinger operator (ポスター)、QMATH - Mathematical Results in Quantum Physics, 2016年10月9日, Georgia 工科大学 (USA).
2. W. Ichinose, On the Cauchy problem for the Schroedinger equations with polynomially growing potentials in the spatial direction, 日本数学会関数方程式分科会、2016年10月2日、関西大学。
3. W. Ichinose, The Feynman path integral for the Schroedinger equations with polynomially growing potentials in the spatial direction, 日本数学会関数方程式分科会、2016年10月2日、関西大学。
4. I. Sasaki, On the embedded eigenvalue of relativistic Schroedinger operator, 招待講演、偏微分方程式姫路研究集会、2016年3月4日、イーグレ姫路。
5. W. Ichinose, On the construction of the Feynman path integral for the Dirac equation, 招待講演、2015年6月13日、松本偏微分方程式研究集会。
6. W. Ichinose, Dirac 方程式に対する Feynman 経路積分 (1) - 無限遠方の過去と未来を行き交う電子, 日本数学会関数方程式分科会、2015年3月21日、明治大学。
7. W. Ichinose, Dirac 方程式に対する

Feynman 経路積分 (2) - 因果律の相対論的不変性 (有限伝播性), 日本数学会関数方程式分科会、2015年3月21日、明治大学。

8. W. Ichinose, On the Feynman path integral for the Dirac equations, 愛媛大学解析セミナー、招待講演、2015年1月24日、愛媛大学理学部。
9. W. Ichinose, On the construction of the Feynman path integral for the Dirac equations, RIMS Joint Research "Introductory Workshop on Path Integrals and Pseudo-Differential Operators", 招待講演、2014年10月8日、京都大学数理解析研究所。
10. W. Ichinose, On the construction of the Feynman path integral for the Schroedinger and the Dirac equations in the space of tempered distributions, 夏の作用素論セミナー、招待講演、2014年9月7日、長浜勤労福祉会館 (滋賀県長浜市)。
11. I. Sasaki, 相対論的量子電磁気学における基底状態について, 札幌数理物理研究集会、招待講演、2014年9月2日、北海道大学理学部。

#### 6. 研究組織

##### (1) 研究代表者

一ノ瀬 弥 (ICHINOSE, Wataru)  
信州大学・学術研究院理学系・教授  
研究者番号: 80144690

##### (2) 研究分担者

佐々木 格 (SASAKI, Itaru)  
信州大学・学術研究院理学系・准教授  
研究者番号: 50558161