

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 29 年 6 月 7 日現在

機関番号：14301

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2014～2016

課題番号：26400163

研究課題名(和文)非線形偏微分方程式系の解・解空間の大域的解析をめざして

研究課題名(英文)Toward a global analysis for nonlinear partial differential equations

研究代表者

西田 孝明(Nishida, Takaaki)

京都大学・情報学研究科・名誉教授

研究者番号：70026110

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,500,000円

研究成果の概要(和文)：1. 圧縮性粘性流体を水平領域において重力が作用し下から加熱する場合の熱対流問題を解析。系の温度勾配と流体層の厚さに反比例するパラメーター  $L$  への依存性を重視して、定常分岐及び時間発展を考察した。 $L$  が大きくなった極限が、非圧縮性 Oberbeck-Boussinesq 方程式系に当るためにその時の解の挙動をも考察した。

2. 圧縮性粘性 Poiseuille 流の不安定性を解析し、Mach 数が適当に小さくない時には、Reynolds 数が小さくとも不安定を起している事を示した。

3. 非圧縮性粘性流体の人工的圧縮性近似の正当性の証明として、熱伝導解の定常分岐問題の安定性解析を行った。

研究成果の概要(英文)：1. Heat convection problems of compressible and viscous fluids in the horizontal strip domain under the gravity heated from below. We have analyzed stationary bifurcations and its time evolutions while we notice an important parameter  $L$  which depends inversely on the temperature gradient and the depth of the domain. When the parameter  $L$  tends to the infinity, we analyzed how the solutions of the system converge to those of the incompressible Oberbeck-Boussinesq system.

2. We analyzed the stability of the compressible Poiseuille flow. When the Mach number is not small, the flow becomes unstable with a much smaller Reynold number compared with the critical Reynold number for the incompressible Poiseuille flow.

3. As a justification of an 'artificial compressible' perturbation to the incompressible viscous fluids, we analyzed the stability of the stationary bifurcated solutions of the heat convection problems.

研究分野：数物系科学

キーワード：関数方程式 解析学 非線形偏微分方程式系 大域的解析 計算機援用解析 流体方程式系

## 1. 研究開始当初の背景

流体を非圧縮性に見なした定式化と圧縮性を考慮する定式化の比較研究を続けている。

(1)熱対流問題では、Oberbeck-Boussinesq 方程式系(非圧縮性)による定式化が、本来の圧縮性粘性熱伝導性流体の熱対流の定式化の如何なる近似になっているかを調べている。水平な帯状領域を占める一般の流体が、重力の下で下から加熱される場合の熱伝導解の安定性、不安定性を与える臨界 Rayleigh 数の数値計算 (Pyi Aye and T. Nishida (1998)) によれば、後述のパラメータ  $L$  について、 $L$  が無限大に増大した時に臨界 Rayleigh 数  $Rc(L)$  は、Oberbeck-Boussinesq 方程式系のそれに収束している事を示していた。未知関数として速度、温度と圧力を取る定式化では、形式的には方程式系の収束も示唆されていた。それを定常問題、分岐問題、時間発展問題で解析したい。

(2)圧縮性粘性 Poiseuille 流の安定性、即ちその周りでの時間発展系の解の漸近安定性は、Mach 数が小さくて、Reynolds 数も小さい時に Kagei (2012) により示されている。Mach 数が小さくない時の安定性あるいは不安定性が疑問である。

(3)熱対流問題で非圧縮性流体とするモデルである Oberbeck-Boussinesq 方程式系の定常分岐解(六角形型の解、cell 状の解、ロール型の解等)を求め、それらに対する安定性を解析的、数値的に調べる '人工的圧縮性' を加えた Chorin-Temam の方法の正当性を解明したい。

(4)凸性の無い双曲型保存則や凸性の無い Hamilton Jacobi 方程式の数値解法を求めて CIP 差分法の安定性解析と適用可能性の検証をしたい。

## 2. 研究の目的

数理科学に現れる非線形系の数学的構造を

解明することを目的とする。

解の定性的性質、構造、それらの安定性を調べることから進んで、解空間の構造・構造安定性、その変化を自然なパラメータに依存した形で大域的に解析したい。

力学系・双曲型保存則・流体方程式系等を主な対象として、線形近似・弱非線形理論などによる扱いを越えているため未解決である重要な問題を明確に定式化し、その非線形性と物理的に自然なパラメータに着目して、解空間における定常解・周期解のみならず一般の解の時間的遷移過程を調べるための解空間の大域的な特異性・構造とその変化を解明する。

## 3. 研究の方法

非線形系の解・解空間の大域的解析をめざす時、解空間でのパラメータによる解の安定性、不安定性そしてその分岐構造を調べることは、基本的な問題である。

このように大域的に分岐を考察する場合には、分岐を考察する点(解空間での点、即ち、解)において線形化した系のスペクトルに関する情報が必要である。一般的には解析的に得られないので、数値的に求めることになる。更に非線形系の解が解析的に得られていなければ、解をパラメータの値に応じて構成的に求める方法を提案することから始めなければならない。こうして計算機援用解析の方法が必須である事になる。

このように現在の解析学だけでは取扱えない部分を含む問題に対して、計算機援用解析の方法を含んだ大域的解析学として発展させる。

## 4. 研究成果

(1)一般の流体の熱対流問題。

圧縮性粘性熱伝導性流体が、水平な帯状領域を占めて、重力の下で下から加熱される熱対流問題は、Spiegel (1965) に従って無次元

化すると自然なパラメーター  $L$  が現れる。

$L = (T_u + T_l) / (2 \times \beta \times d)$ ,  $T_u$ ,  $T_l$  は上下の温度、 $\beta$  は温度勾配、 $d$  は層の厚さ。

平衡解 (熱伝導解) の不安定性を与える臨界 Reynolds 数  $R_c(L)$  は、速度について stress free の境界条件でも 固定の境界条件でも、 $L$  が無限大に増大すると Oberbeck-Boussinesq 方程式系の臨界 Reynolds 数に収束している事を数値計算が示していた。それを基に  $L > L_1$  に対して一様に Reynolds 数  $R > R_c(L)$  で定常分岐が起っている事を固定境界条件の時に示し、それに従って  $L$  が無限大になる極限での分岐解の収束も示した。stress free の境界条件の場合は研究中である。

続いて系の時間発展を考察し、線形系の場合には、 $L > L_2$  で一様に時間大域的に解けて  $L$  が増大した極限では、Oberbeck-Boussinesq 方程式系のエネルギー式の時間微分の項に圧力変数から来る修正が必要な事を示した。Nishida, Padula and Teramoto, III (2016).

(2) 圧縮性粘性流体の Poiseuille 流の安定性、不安定性の解析。

不安定性を見る為に、この Poiseuille 流の周りでの線形化方程式系のスペクトル解析を行った。非圧縮性流体の Poiseuille 流の線形臨界 Reynolds 数 (およそ 5772) の大きさと比べると、Mach 数が小さくない時 (およそ 2.5) には Reynolds 数が遥かに小さい値 (およそ 10.8) で線形不安定性を起している事が解析的に示せた。Kagei and Nishida, (2015).

この不安定性は、Reynolds 数が臨界 Reynolds 数を超える時に、複素共役の固有値が虚軸上を横切るため、Hopf 分岐を起している事を示唆しており、その解析に進んでいる。

(3) 非圧縮性流体の定常解の安定性を '人工的圧縮性' を加えた系の定常解の安定性を用いて調べる。

非圧縮性流体の方程式系の定常解を求め、その安定性を調べるために Chorin-Temam による '人工的圧縮性' に当たる圧力の時間項を質量保存則に導入する方法がある。それによれば方程式系の解として定常解のすべては両者に共通している。後者の時間発展の極限として得られる解はもちろん両者の定常解である。しかし時間に依存しない定常解の全てが、後者の時間発展させた時間無限大での定常解として得られるわけではない。定常解の周りでの線形化方程式系のスペクトルを解析し、両者の定常解の安定性、不安定性の条件を解析的に求めた。(Kagei and Nishida (2016)) 非圧縮系である Oberbeck-Boussinesq 方程式系に人工的圧縮性を付加した系の数値計算 (Chorin (1967), Nishida and Teramoto (2009)) による時間発展の極限として得られる (従って安定な) 定常解 (六角形型やロール型) の安定性から元の非圧縮性 O-B 方程式の定常解の安定性を知る方法の正当化にもなっている。

(4) CIP (差分) 法の安定性解析。

非線形偏微分方程式の時間発展の数値解法の一つとして、Cubic Interpolation Pseudo-particle 法が Takewaki-Nishiguchi-Yabe (1985) 以来良く開発され、精度の良い数値計算として多方面に使われている。しかしながらその安定性、収束性に関する解析は、その差分法の複雑性によりほとんど見られなかった。偏微分方程式として最も簡単な単独一階線形移流双曲型方程式についてその差分法の安定性従って収束性を始めて示した。それによりこの差分法は、二乗可積分関数の空間で弱安定性しか持たないことも分かった。(Tanaka-Fujiwara-Nishida-Iso (2015))

この方法等を用いて、凸性のない双曲型保存則や凸性のない Hamilton-Jacobi 方程式を数値的に扱おうとしているが、まだ成功していない。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 4 件)

Takaki Nishida, Mariarosaria Padula and Yoshiaki Teramoto, Heat Convection of Compressible Viscous Fluids. III, Mathematical Fluid Dynamics, Present and Future, Springer Proc. 査読有、183 巻、2016, 487-493, 国際共著。

DOI:10.1007/978-4-431-56475-7

Yoshiyuki Kagei and Takaaki Nishida, On Chorin's Method for Stationary Solutions of the Oberbeck-Boussinesq Equations, Journal of Mathematical Fluid Mechanics, 査読有、19 巻、2016, 1-21,

DOI:10.1007/s00021-016-0284-3

Yoshiyuki Kagei and Takaaki Nishida, Instability of Plane Poiseuille Flow in Viscous Compressible Gas, Journal of Mathematical Fluid Mechanics, 査読有、17 巻、2015, 129-143,

DOI:10.1007/s00021-014-0191-4

田中大毅、藤原宏志、西田孝明、磯祐介、線形移流方程式を解く CIP 法の安定性、日本応用数学会論文誌、査読有、25 巻、2015, 1-14

[学会発表](計 6 件)

Takaaki Nishida, Instabilities of Compressible Poiseuille Flow and Traveling Waves, International Conf. on Kinetic Theory and Fluid Dynamics, 2016/5/26-28, Kyoto University.

Takaaki Nishida, Heat Convection

Problems of Compressible Viscous Fluids, Advances in Kinetic and Fluid Dynamics Transport, 2016/2/22-26, University of Texas at Austin, USA

Takaaki Nishida, Instabilities of Compressible Poiseuille Flow and Traveling Waves, Distinguished Applied Mathematical Lecture, NCTS, 2015/11/23, National Taiwan University, Taiwan

Takaaki Nishida, Heat Convection Problems of Compressible Viscous Fluids, Mathematical Fluid Mechanics: Old Problems and New Trends, 2015/8/30-9/5, Banach Center, Bedlewo, Poland

Takaaki Nishida, Heat Convection Problems of Compressible, Viscous and Heat-conducting Fluids, International Conference on Nonlinear Analysis: Boundary Phenomena for Evolutionary PDE, 中央研究院、数学研究所、台北、台湾

Takaaki Nishida, Heat Convection Problems of Compressible Viscous Fluids, International Conference on Mathematical Fluid Dynamics, Present and Future, 2014/11/11-14, Waseda University

[図書](計 0 件)

[産業財産権]

出願状況(計 0 件)

名称:

発明者:

権利者:

種類:

番号:

出願年月日:

国内外の別:

取得状況 (計 0 件)

名称 :

発明者 :

権利者 :

種類 :

番号 :

取得年月日 :

国内外の別 :

[ その他 ]

ホームページ等

無し

## 6 . 研究組織

### (1)研究代表者

西田 孝明 ( NISHIDA Takaaki )

京都大学・大学院情報学研究科・名誉教授

研究者番号 : 70026110

### (2)研究分担者

無し

### (3)連携研究者

無し

### (4)研究協力者

寺本 恵昭 ( TERAMOTO Yoshiaki )

摂南大学教授、

隠居 良行 ( KAGEI Yoshiyuki )

九州大学教授、

Mariarosaria Padula,

Professor of Ferrara University, 物故