様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ３０ 年　 ５ 月 １６ 日現在

機関番号：１４３０２
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2014～2017
課題番号：２６４００１６４

研究課題名（和文）制約条件付き流体方程式と一般化された放物型変分不等式に対する相補性条件の応用

研究課題名（英文）Obstacle problem for fluid mechanics and parabolic variational inequalities

研究代表者
深尾　武史（Fukao, Takeshi）
京都教育大学・教育学部・教授
研究者番号：００３９０４６９

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,400,000円

研究成果の概要（和文）：　体積制約条件を含む放物型変分不等式に対する可解性とその応用について考察した。劣微分作用素を含む作用素包含式をバナッハ空間に拡張した抽象論を構成したことで、抽象発展方程式として同じ構造を持つ力学的境界条件下もしくは動的境界条件と呼ばれる条件下でのアレン－カーン方程式や、それに類するカーン－ヒリアード方程式の体積制約問題に結果を応用することができた。さらに、内部と境界上の体積の和が保存するという「総体積保存則」が方程式の構造上、重要であることが明らかになり、制約条件無しに方程式系そのものが持つ自然な構造として「総体積保存則」を満たすカーン－ヒリアード方程式系の導出とその可解性の研究に至った。

研究成果の概要（英文）：We consider the well-posedness for an abstract parabolic variational inequality with some volume constraint. Using the abstract theory for operator inclusion of subdifferential which is related to the volume constraint on some Banach space, we can obtain the suitable well-posedness results for Allen-Cahn equation or Cahn-Hilliard system with dynamic boundary conditions. As the gift of this treatment, we can find an interesting problem of equation and dynamic boundary condition of Cahn-Hilliard type, and then, we also prove the well-posedness of this kind of Cahn-Hilliard system.

研究分野：発展方程式論

キーワード：発展方程式　体積制約条件　力学的境界条件　動的境界条件　放物型方程式

１．研究開始当初の背景

温度 0 度を境に水が氷に変化するような、相の状態が劇的に変化する「相転移」と呼ばれる現象をしばしば観察することができる。熱水力学に現れる相転移現象を偏微分方程式で記述する際、ある限定された凸制約集合内で解に相当するものを見つけるという非線形性を課すならば、その非線形性は変分不等式の枠組みで取り扱うことができる。本研究ではそのような変分不等式の可解性の証明を通じて、発展方程式の抽象理論の拡張とバナッハ空間での非線形凸計画との関連の解明を行う。流体方程式の可解性や解の特徴付けと非線形凸計画で用いられる抽象理論との関連は未開拓な点が多く、本研究はその 2 つの研究分野の接続につながると期待できる。

２．研究の目的

制約条件付き問題のなかで、特に体積制約に相当する条件を課した問題を発展方程式の抽象論の枠組みで取り扱う。ヒルベルト空間上での既存の結果をより広く一般のバナッハ空間まで拡張することを第一の目標とする。また、時間微分を表現するための非線形作用素を導入し、解の時間微分の正則性と引き替えにより一般的な制約条件の下での問題について可解性の結果を得る。また、その応用として、力学的境界条件もしくは動的境界条件と呼ばれる、時間微分を境界条件に含む問題に抽象論を応用し、特に体積制約条件を課したアレン–カーン方程式やカーン–ヒリアード方程式の可解性について結果を得る。

３．研究の方法

制約条件を体積制約条件に限定した場合、関連する問題については先行研究によって発展方程式の抽象論によって、ラグランジュ乗数による表現定理が得られていた。これをより広い問題に拡張するため、時間微分を表現する擬単調作用素を導入し、劣微分作用素を含む対応する作用素包含式に処罰法を適応する。

一方、具体的な問題として、熱水力学に現れる熱対流方程式や、時間微分を境界条件に含む様な力学的境界条件もしくは動的境界条件と呼ばれる境界条件を課したアレン–カーン方程式やカーン–ヒリアード方程式について考察する。流速の制約条件や体積保存条件を過剰に課した問題について、変分不等式として捉え、抽象論を応用して可解性を得る。

４．研究成果

熱対流方程式では温度が流速の制約として関わる変分不等式の可解性を得るに至った。また抽象論の立場から、体積制約問題を取り扱うために、劣微分作用素を含む対応する作用素包含式をバナッハ空間に拡張した抽象論を構成したことで、抽象発展方程式として同じ構造を持つアレン–カーン方程式や、それに類するカーン–ヒリアード方程式の体積制約問題に抽象論の結果を応用することができた。またこの場合、アレン–カーン方程式では内部と境界上の過剰条件が 1 つのラグランジュ乗数によって表現できる。一方、カーン–ヒリアード方程式では内部の体積保存条件は方程式から自動的に得られる一方で、境界上の制約条件がラグランジュ乗数によって表現された。これらの問題を通じて、内部と境界上の体積の和が保存するという「総体積保存則」が方程式の構造上、重要であることが明らかになり、制約条件無しに方程式系が持つ自然な構造として「総体積保存則」を満たすカーン–ヒリアード方程式系の導出に至った。実際、そこで導出された系については、すでにいくつかの先行研究がなされていたが、先行研究で用いられていた二重井戸型ポテンシャルは滑らかな場合に限られていた。よって、より広い非線形性を表現する多価作用素を含む二重井戸型ポテンシャルにまで結果を拡張し、弱解の存在や一意性と連続依存性、および強解の存在定理を得るに至った。

一方その拡張を下に、カーン–ヒリアード方程式から退化放物型方程式への接近について、その表現定理ならびに誤差評価について結果を得た。二重井戸型ポテンシャルの拡張によって、多孔質媒体方程式、ステファン問題の弱形式、log 型の非線形拡散やヘレ-ショウ問題の弱形式に至るまでの退化放物型方程式がカーン–ヒリアード方程式の解によって特徴付けられることが明らかになった。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　１１件）

[1] <u>T. Fukao</u>, Y. Tsuzuki and T. Yokota, Solvability of p-Laplacian parabolic equations with constraints coupled with Navier–Stokes equations in 3D domains by using largeness of p, Funkcial. Ekvac., **60** (2017), 1–20.
査読あり
DOI: 10.1619/fesi.60.1

[2] M. H. Farshbaf-Shaker, <u>T. Fukao</u> and N. Yamazaki,
Lagrange multiplier and singular limit of double-obstacle problems for the Allen–Cahn equation with constraint,
Math. Methods Appl. Sci., **40** (2017), 5–21.
査読あり
DOI: 10.1002/mma.3905

[3] <u>T. Fukao</u>,
Cahn–Hilliard approach to some

degenerate parabolic equations with dynamic boundary conditions, pp.282–291 in "*System Modeling and Optimization*", IFIP Advances in Information and Communication Technology, Springer, 2016.
査読あり
DOI: 10.1007/978-3-319-55795-3_26

[4] T. Fukao,
Convergence of Cahn–Hilliard systems to the Stefan problem with dynamic boundary conditions, Asymptot. Anal., **99** (2016), 1–21.
査読あり
DOI: 10.3233/ASY-161373

[5] P. Colli and T. Fukao,
Nonlinear diffusion equations as asymptotic limits of Cahn–Hilliard systems, J. Differential Equations, **260** (2016), 6930–6959.
査読あり
DOI: 10.1016/j.jde.2016.01.032

[6] P. Colli and T. Fukao,
The Allen–Cahn equation with dynamic boundary conditions and mass constraints, Math. Methods Appl. Sci., **38** (2015), 3950–3967.
査読あり
DOI: 10.1002/mma.3329

[7] P. Colli and T. Fukao,
Equation and dynamic boundary condition of Cahn–Hilliard type with singular potentials, Nonlinear Anal., **127** (2015), 413–433.
査読あり
DOI: 10.1016/j.na.2015.07.011

[8] M. H. Farshbaf-Shaker, T. Fukao and N. Yamazaki,
Singular limit of Allen–Cahn equation with constraints and its Lagrange multiplier, pp.418–427 in "*Dynamical Systems and Differential Equations, AIMS Proceedings, 2015*", American Institute of Mathematical Sciences, 2015.
査読あり
DOI: 10.3934/proc.2015.0418

[9] P. Colli and T. Fukao,
Cahn–Hilliard equation with dynamic boundary conditions and mass constraint on the boundary, J. Math. Anal. Appl., **429** (2015), 1190–1213.
査読あり
DOI: 10.1016/j.jmaa.2015.04.057

[10] T. Fukao and N. Kenmochi,
Quasi-variational inequality approach to heat convection problems with temperature dependent velocity constraint, Discrete Contin. Dyn. Syst., **35** (2015), 2523–2538.
査読あり
DOI:10.3934/dcds.2015.35.2523

[11] T. Fukao and N. Kenmochi,
Abstract theory of variational inequalities with Lagrange multipliers and application to nonlinear PDEs, Math. Bohem., **139** (2014), 391–399.
査読あり

〔学会発表〕（計　２２件）

[1] **深尾武史–山崎教昭**, GMS **モデルに対する最適制御問題について日本数学会** 2017 **年度年会 実関数論分科会**, 2017 **年** 03 **月，首都大学東京**.

[2] Takeshi Fukao, Quasi-static problem for the Cahn–Hilliard equation on the boundary, Special Afternoon on Diffuse Interface Models and Related Problems, 2017 **年** 02 **月，** Pavia University, Pavia, Italy.

[3] **深尾武史**–Pierluigi Colli, Cahn-Hilliard **方程式から退化放物型方程式への収束とその誤差評価について，第** 42 **回発展方程式研究会**, 2016 **年** 12 **月，日本女子大学**.

[4] **深尾武史**, Cahn–Hilliard **方程式から退化放物型方程式への接近について －力学的境界条件を中心に－，『 応用解析 』研究会**, 2016 **年** 10 **月，早稲田大学**.

[5] **深尾武史**–Pierluigi Colli,
Cahn–Hilliard **方程式から退化放物型方程式への接近について，日本数学会** 2016 **年度秋季総合分科会 実関数論分科会**, 2016 **年** 09 **月**, **関西大学**.

[6] Takeshi Fukao, Equation and dynamic boundary condition of Cahn–Hilliard type with related topics, The 11th AIMS Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications, 2016 **年** 07 **月**, Orlando, Florida, USA.

[7] Takeshi Fukao, Perspectives in the equation and dynamic boundary condition of Cahn–Hilliard type, Seminar in ICM, Poland, 2016 **年** 06 **月**, Interdisciplinary Center for Mathematical and Computational Modelling, Poland, Warsaw.

[8] Takeshi Fukao–Pierluigi Colli, Equation and dynamic boundary condition of Cahn–Hilliard type, INdAM meeting Optimal Control for Evolutionary PDEs and Related Topics, 2016 年 06 月, Palazzone, Cortona (Arezzo), Italy.

[9] 深尾武史–Pierluigi Colli, 力学的境界条件下での退化放物型方程式について, 日本数学会 2016 年度年会 実関数論分科会, 2016 年 03 月, 筑波大学.

[10] Takeshi Fukao, Degenerate parabolic equations with dynamic boundary condition, Perspectives in Applied PDEs: a day in Pavia, 2016 年 02 月, Pavia University, Pavia, Italy.

[11] 深尾武史–Pierluigi Colli, 力学的境界条件下での退化放物型方程式への Cahn–Hilliard 系からの接近について, 第 41 回発展方程式研究会, 2015 年 12 月, 日本女子大学.

[12] 深尾武史, 総体積保存則に注目した力学的境界条件下での Cahn–Hilliard 方程式の可解性と退化放物型方程式への応用, 第 6 回 移流と拡散の数理, 2015 年 12 月, 愛媛大学.

[13] 深尾武史, 力学的境界条件下での Stefan 問題への Cahn–Hilliard 系からの接近について, 日本数学会 2015 年度秋季総合分科会 実関数論分科会, 2015 年 09 月, 京都産業大学.

[14] Takeshi Fukao, Cahn–Hilliard approach to Stefan problem with dynamic boundary condition and related topics, Equadiff 2015, 2015 年 07 月, Lyon, France.

[15] Takeshi Fukao, Cahn–Hilliard approach to Stefan problem with dynamic boundary condition, 27th ifip TC7, Conference 2015 on System Modelling and Optimization, 2015 年 06 月 ～ 2015 年 07 月, Sophia Antipolis, France.

[16] 深尾武史–Pierluigi Colli, Some equations and dynamic boundary conditions of Cahn–Hilliard type with singular potentials, 日本数学会 2015 年度年会 実関数論分科会, 2015 年 03 月, 明治大学.

[17] 深尾武史, 力学的境界条件下での 2 相 Stefan 問題に対する GMS モデルからの接近, 第 5 回非線形数理科学, 2015 年 02 月, ながおか市民センター.

[18] 深尾武史–Pierluigi Colli, Cahn–Hilliard 型の方程式ならびに力学的境界条件に対する初期値問題について, 第 40 回発展方程式研究会, 2014 年 12 月, 日本女子大学.

[19] 深尾武史–Pierluigi Colli, Cahn–Hilliard equation with dynamic boundary conditions and mass constraints on the boundary, 日本数学会 2014 年度秋季総合分科会 実関数論分科会, 2014 年 09 月, 広島大学.

[20] M. H. Farshbaf-Shaker–Takeshi Fukao–Noriaki Yamazaki, Singular limit of Allen–Cahn equation with constraint and its Lagrange multiplier, AIMS' 10th International Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications, 2014 年 07 月, Madrid, Spain.

[21] Takeshi Fukao, Recent advances in parabolic variational inequalities with weakly time-dependent constraints, I.M.A.T.I. - C.N.R. Applied Mathematics Seminar (2013-14), 2014 年 05 月, Pavia, Italy.

[22] Takeshi Fukao–Pierluigi Colli, Allen–Cahn equation with dynamic boundary conditions and mass constraints, COPDE2014 Conference on Partial Differential Equations, 2014 年 05 月, Novacella, Italy.

６．研究組織

(1)研究代表者

深尾　武史（FUKAO，Takeshi）
京都教育大学・教育学部・教授
研究者番号：００３９０４６９