

令和元年5月30日現在

機関番号：15301

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2014～2018

課題番号：26400169

研究課題名(和文)(N-2)次元曲面の与えるAllen-Cahn方程式のN次元進行波

研究課題名(英文) An (N-2)-dimensional surface with positive principal curvatures gives an N-dimensional traveling front in bistable reaction-diffusion equations

研究代表者

谷口 雅治 (Masaharu, Taniguchi)

岡山大学・異分野基礎科学研究所・教授

研究者番号：30260623

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,700,000円

研究成果の概要(和文)：Allen-Cahn方程式またはNagumo方程式とよばれる双安定な反応項をもつ放物型方程式をN次元空間全体で考え、それがもつ進行波で未知なものを探索することが本研究の目的である。(N-1)次元空間においてコンパクトな凸図形が与えられたときこれを切断面とするN次元進行波解が存在することを証明することに成功した。またこの進行波は与えられた擾乱に対して漸近安定であることを示した。得られた成果はSIAM J. Math. Anal. に2015年、J. Differential Equationsに2016年に掲載された。

研究成果の学術的意義や社会的意義

Allen-Cahn方程式(Nagumo方程式)は二層問題を記述するもっとも基本的な数理物理モデルである。形を保ったままで一定速度で伝播する波は進行波とよばれ、近年、多次元進行波の研究が求められている。この方程式の拡散項と反応項のいずれにも異方性すなわち方向依存性は入っておらず、空間的に等方的なモデルである。本研究では進行軸に対して軸非対称な多次元進行波の存在が始めて証明された。またこの軸非対称進行波が与えられた擾乱が無限遠方で減衰するとき、安定に伝播することが解明された。この事実は数理物理モデルにおける二層問題において情報がどのように伝達されるかを解明する手がかりになると期待される。

研究成果の概要(英文)：In this project, I consider a parabolic equation with a bistable nonlinear term. This equation is called the Allen-Cahn equation or the Nagumo equation. The aim of this project is to search unknown traveling fronts. The result is as follows. For every given compact convex set in the (N-1)-Euclidean space, I proved the existence of an N-dimensional traveling front solution associated with this set. Moreover, I proved that this traveling front solution is asymptotically stable if the given perturbation decays at infinity. These results were published by SIAM J. Math. Anal. 2015 and by J. Differential Equations 2016.

研究分野：解析学

キーワード：進行波 Allen-Cahn方程式 多次元 非対称

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19、CK - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

Allen-Cahn 方程式(Nagumo 方程式)とよばれる双安定な反応項をもつ放物型方程式を N 次元空間全体で考える。この方程式がもつ進行波を探求する試みは近年、活発に行われてきた。2次元 V 字型進行波(Ninnomiya-Taniguchi 2005, Hamel, Monneau, Roquejoffre 2005, 2006), 軸対称進行波(Hamel, Monneau, Roquejoffre 2005, 2006), 角錐型進行波(Taniguchi 2007, Kurokawa-Taniguchi 2011)などである。軸対称進行波はその等高面の切断面が円または球である。角錐型進行波の等高面の切断面は多角形である。等高線の切断面が楕円であるような N 次元進行波が存在するのかという問題は未解決であった。

2. 研究の目的

Allen-Cahn 方程式(Nagumo 方程式)を N 次元空間全体で考える。進行軸に対して垂直に切った等高面の切断面が楕円であるような進行波の存在を証明し、そのもつ性質を解明することが本研究の第一の目的である。より一般には「滑らかな境界をもつコンパクト凸集合」が与えられたときにこれを等高面の切断面とするような N 次元進行波が存在することを証明し、それが与えられた初期擾乱に対して復元力をもって伝播する漸近安定な進行波であることを示すことを次の目的とした。

3. 研究の方法

N 次元角錐型進行波(Taniguchi 2007, Kurokawa-Taniguchi 2011)の側面の数を無限大にする極限をとることにより、与えられたコンパクト凸図形を等高面の切断面とするような N 次元進行波の存在証明に成功した。その議論において、角錐型進行波の遷移層(transition layer)の幅が側面の数によらない「上からの一様評価」をもつことを示すことが必要となった。本研究でこの遷移層の幅の側面の数によらない評価を与えることに成功し、角錐型進行波の極限として上記の進行波の存在を証明した。

この科研費の助成によりいくつかの研究集会が開催された。具体的には、研究集会「非線形偏微分方程式の非線形偏微分方程式の定性的理論」(2017年9月, 岡山大学理学部), Okayama Workshop on Partial Differential Equations (2017年10月岡山大学, 2018年10月岡山大学)などである。いずれも多くの研究者・学生の参加があり活発な議論が展開された。

4. 研究成果

$(N-1)$ 次元空間において、なめらかな境界をもつコンパクト凸領域が任意に与えられたとする。ここで境界の主曲率はすべて正であるとする。このとき、このコンパクト凸領域を切断面とするような N 次元進行波が存在することを証明した。この成果は SIAM J. Math. Anal. に 2015年に掲載された。また Lotka-Volterra 方程式系など競争系または競合系とよばれる反応拡散方程式系に対しても同様の結果が成立することを証明し J. Differential Equations に 2016年に掲載された。

5. 主な発表論文等

[雑誌論文](計4件)

(1) Masaharu Taniguchi

“Axially asymmetric traveling fronts in balanced bistable reaction-diffusion equations”

Annales de l'Institut Henri Poincaré C, Analyse Non Lineaire (掲載受理)

[doi:10.1016/j.anihpc.2019.05.001](https://doi.org/10.1016/j.anihpc.2019.05.001)

(査読有)

(2) Amy Poh Ai Ling and Masaharu Taniguchi

“Existence and stability of stationary solutions to the Allen-Cahn equation discretized in space and time”

Mathematical Journal of Okayama University (掲載受理)

(査読有)

(3) Masaharu Taniguchi

“Convex compact sets in \mathbb{R}^{N-1} give traveling fronts of cooperation-diffusion systems in \mathbb{R}^N ”

Journal of Differential Equations
Vol. 260, No. 5 (2016), pp. 4301--4338
doi:10.1016/j.jde.2015.11.010

(査読有)

(4) Masaharu Taniguchi

"An (N-1)-dimensional convex compact set gives an
N-dimensional traveling front in the Allen-Cahn equation"

SIAM Journal on Mathematical Analysis

Vol. 47, No. 1 (2015), pp. 455--476

DOI:10.1137/130945041

(査読有)

[学会発表] (計 11 件)

(1) 谷口雅治

"Axially non-symmetric traveling fronts in balanced
bistable reaction-diffusion equations"

日本数学会秋季総合分科会 (9/24--9/27, 2018 , 岡山大学津島キャンパス)

函数方程式分科会一般講演

発表は 9/25 (火)

(2) 谷口雅治

"Multidimensional traveling fronts in reaction-diffusion equations"

The 11th MSJ-SI The Role of Metrics in the Theory of Partial Differential
Equations

北海道大学 , 2018 年 7 月 2 日から 13 日

(発表は 2018 年 7 月 12 日)

(3) Masaharu Taniguchi

"Multidimensional traveling fronts in reaction-diffusion equations"

Special Session 117, The 12th AIMS Conference on Dynamical Systems,

Differential Equations and Applications, July 5 -- July 9, 2018, Taipei, TAIWAN

(4) 谷口雅治

「 Allen-Cahn 方程式における角錐型進行波の一意性と安定性 」

日本数学会秋季総合分科会 函数方程式分科会

山形大学

2017 年 9 月 11 日から 9 月 14 日

発表は 9 月 12 日

(5) Masaharu Taniguchi

"An (N-1)-dimensional convex compact set gives an N-dimensional traveling front"

Minisymposium MS-12 "Nonlinear parabolic equations"

Equadiff2017, July 24-28, 2017, Bratislava, Slovakia

(6) Masaharu Taniguchi

"An (N-1)-dimensional convex compact set gives an N-dimensional traveling front"

Special Session "Mathematical Biology," International Conference for the
70th Anniversary of Korean Mathematical Society, Seoul National University

October 20(Thu) --23(Sun), 2016

(講演は 10/22 (土))

(7) Masaharu Taniguchi

"An (N-1) -dimensional convex compact set gives an N-dimensional traveling
front"

Special Session 12, 11th AIMS International Conference on Dynamical Systems,
Differential Equations and Applications, Orlando, USA, July 1-5, 2016

(発表は 7/3(Sun))

(8) Masaharu Taniguchi

"Multidimensional traveling fronts in reaction-diffusion equations"

2015 KAIST CMC Mathematical Biology Conference on

Cross-diffusion, chemotaxis, and related problems
KAIST (Korea Advanced Institute of Science and Technology), Daejeon, Korea
Dates: July 8 (Wednesday) - July 10 (Friday), 2015
(発表は 7/8(水))

- (9) Masaharu Taniguchi
"Multidimensional traveling fronts in reaction-diffusion equations"
The Tenth East China Partial Differential Equations Conference
Center for Partial Differential Equations, East China Normal University
Shanghai, China, from June 15(Mon) to June 18(Thu), 2015
(発表は 6/15(月))
- (10) 谷口雅治
"Convex compact sets in \mathbb{R}^{N-1} give traveling fronts
of cooperation-diffusion systems in \mathbb{R}^N "
日本数学会秋季総合分科会函数方程式分科会
2014年9月28日(日), 広島大学東広島キャンパス
- (11) Masaharu Taniguchi
"Convex compact sets in \mathbb{R}^{N-1} give traveling fronts
in \mathbb{R}^N in cooperative diffusion systems"
BIRS Workshop 14w5017, Geometric Aspects of Semilinear Elliptic and
Parabolic Equations: Recent Advances and Future Perspectives,
Banff International Research Station, Canada
May 25(Sun)--May 30(Fri), 2014
(発表は May29)

〔図書〕(計0件)

〔産業財産権〕
出願状況(計0件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年：
国内外の別：

取得状況(計0件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等 なし

6. 研究組織

(1)研究分担者
研究分担者氏名：
ローマ字氏名：
所属研究機関名：

部局名：

職名：

研究者番号（8桁）：

(2)研究協力者

研究協力者氏名：

ローマ字氏名：

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。