

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 30 年 6 月 15 日現在

機関番号：15501

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2014～2017

課題番号：26400170

研究課題名(和文) 変数係数発展方程式の解析とキルヒホフ型波動方程式の非線形構造の解明

研究課題名(英文) Evolution equations with variable coefficients and their applications to Kirchhoff equation

研究代表者

廣澤 史彦 (Hirosawa, Fumihiko)

山口大学・大学院創成科学研究科・教授

研究者番号：50364732

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,200,000円

研究成果の概要(和文)：本研究では、キルヒホフ方程式の初期値問題の大域可解性が成り立つ初期値のクラスを実解析関数を含まない ultradifferentiable クラスの中で特徴づけた。また、キルヒホフ方程式の線形化である時間に依存する伝播速度を持つ波動方程式や、質量が時間に依存するクライン・ゴルドン方程式などの時間変数係数発展方程式に対する解析も行った。キルヒホフ方程式に関する本研究の主定理は前者の線形方程式に対する時間周波数空間における精密な評価が本質的である。後者については、既存の手法では評価が困難な質量が符合変化を伴うモデルに対して本研究で新たに導入した手法を用いてエネルギー評価を導いた。

研究成果の概要(英文)：We study the global solvability to the Cauchy problem of nonlinear wave equation of Kirchhoff type in a certain class of ultradifferentiable functions, which is not included real-analytic class. We also study linear evolution equations with time dependent coefficients in particular the linear wave equation with time dependent propagation speed and the Klein-Gordon equation with time dependent mass. The former equation is a linearized model of Kirchhoff equation, and the analysis of it will be expected to apply the problem of Kirchhoff equation; indeed, our main result for Kirchhoff equation is due to a precise estimate for the linear wave equation. For the latter equation, we derive some energy estimates with oscillating mass around 0, which are not really trivial from the previous results. Both estimates for linear evolution equations are derived by precise analysis in the time-frequency space which is developed in the research of this project.

研究分野：数学

キーワード：キルヒホフ方程式 非線形波動方程式 変数係数 発展方程式 クライン・ゴルドン方程式

1. 研究開始当初の背景

キルヒホフ方程式は、ゴム紐のような伸び縮みする弦の振動を記述するモデルとして1883年にG. Kirchhoffによって導出された次のような非線形の波動方程式である。

$$\partial_t^2 u - \Phi(t; u)^2 \partial_x^2 u = 0$$

$$\Phi(t; u) := \sqrt{1 + \varepsilon \int_I |\partial_x u(t, x)|^2 dx}$$

キルヒホフ方程式の最大の特徴は、解の伝播速度「 Φ 」が弦の伸びによって変化する非局所的な非線形性を持つことである。

この方程式に対する数学的な研究は20世紀前半から始まり、現在に至るまで数多くの研究結果が知られている。しかし、微分方程式の研究において最も基本的な問題である「大域可解性(時間大域的な解の存在)」については、初期値が十分に小さい、または実解析関数に近い十分に滑らかな場合を除いて解決されておらず、偏微分方程式の分野の有名な未解決問題の一つである。キルヒホフ方程式は、上記の非局所的な非線形性に加えてエネルギー保存則を満たしており、これらの性質を大域可解性の証明にどのようにつなげられるか、というのが問題解決のカギであると考えられている。また、その証明において時間変数係数の線形発展方程式の摂動として評価する方法が有望であると期待されている。

2. 研究の目的

本研究の目的は、上記の未解決問題である「キルヒホフ方程式の大域可解性」の部分的な解決と、その問題解決に重要と考えられるキルヒホフ方程式の線形近似であり変数係数発展方程式の一種である「伝播速度が時間に依存する線形波動方程式」の解析、および変数係数発展方程式の中でも研究が盛んで応用上も重要な「変数係数波動方程式」や「クライン・ゴールドン型方程式」のエネルギー評価の問題を、特に係数の滑らかさと振動の特性を考慮した新たな視点から、既存の結果の精密化と改良を行うことである。

3. 研究の方法

本研究の中心となるのは、時間に依存する係数を持つ発展方程式の時間周波数領域における精密な解析、すなわち方程式をフーリエ変換してできる周波数成分をパラメータとみなした常微分方程式の解析である。そこから得られるエネルギー評価から、キルヒホフ方程式の線形化方程式である伝播速度が時間に依存して変化する線形波動方程式やクライン・ゴールドン型方程式の解に対して、既知の方法から得られなかった精密な解の解析結果が得られることが期待できる。

本研究の根幹をなす変数係数発展方程式

の解析手法におけるキーワードは、「係数の振動と滑らかさ(A)」、「発展作用素の対角化(B)」、そして係数の特性を考慮した「時間周波数領域の適切な分割(C)」と「各分割領域における適切な評価方法の確立(D)」である。これらの中の幾つかは、既知の研究手法を踏襲、改良したものだが、特に(C)と(D)に関しては、最新の研究を独自に改良し、かつこれまで重要視されていなかったエネルギーの漸近評価における解の高周波領域の解釈に新たな視点を加えたものである。

4. 研究成果

(1)キルヒホフ方程式の時間大域的な解の存在性について：

偏微分方程式の初期値問題における解の大域可解性は、偏微分方程式の研究において出発点となる最も基本的な問題であるが、特に初期値によって解の爆発等が起こる可能性がある非線形や係数が特異性を持つ方程式においては、その問題は必ずしも自明ではない。キルヒホフ方程式においては、十分に小さい、または実解析関数に近い十分に滑らかな初期値に対する大域可解性の証明はそれほど困難ではない。しかし、それらの条件を満たさないより一般の初期値に対する大域可解性は非常に困難となり、[N]による準解析関数クラス、[M]や[H5]によるManfrinクラスなどの特殊な条件を持つ初期値に対する大域可解性のみが知られていた。本事業による研究成果の一つは、ultradifferentiableクラスと呼ばれる実解析関数のクラスに含まれない非常に一般的な関数のクラスの中で大域可解性が成り立つ初期値の特徴づけを行い、[M, H5]の結果を含んだ現在知られている中で準解析関数クラスを除き最も広い関数のクラスに対して、キルヒホフ方程式の大域可解性を[H5]で証明したことである。

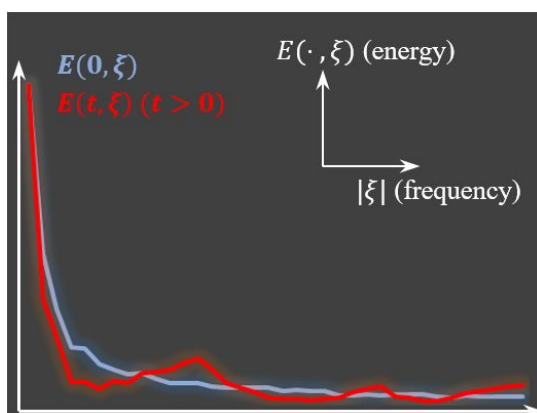
(2)双曲型変数係数発展方程式のエネルギー評価における初期値の係数の滑らかさの影響：

キルヒホフ方程式の線形化方程式である伝播速度が時間変数に依存する波動方程式(変数係数波動方程式)は、変数係数発展方程式の一種である。伝播速度が定数である通常の波動方程式に対して、この方程式の解は時間変化する伝播速度の影響を受けて劇的に異なる挙動する可能性がある。それ故、一般論では非常に扱いが難しい方程式であると同時に、非常に興味深い研究対象でもあり、本来のキルヒホフ方程式への応用面だけでなく、その方程式自体の解析を目的とする数多くの研究結果が知られている。本事業では特に、その方程式の初期値問題の解のエネルギー評価について研究を行った。

通常の波動方程式では初期値が持つ滑らかさやエネルギーは時間発展で保存される

が、変数係数波動方程式の場合には一般にどちらも保存されない。それを受け、これまでは「時間発展による初期値のエネルギーの変化」または「時間発展による初期値の持つ滑らかさの変化」のいずれかの問題を対象とした研究がほとんどであった。これらは、通常の波動方程式に対する問題意識からは自然だが、変数係数波動方程式の場合には、「エネルギー」と「解の滑らかさ」を分けて考察することはむしろ自然ではなく、これらを組み合わせて考察することによって、より精密な議論と新たな現象が観測される場合がある。このような発想から得られた本事業での研究成果の一部である[H3, H4]の結果の概略は次の通りである：

「時間発展でエネルギーが有限にとどまらないような「悪い影響を解に与える」係数を持つ変数係数波動方程式の初期値問題に対しても、ジェブレイクラスと呼ばれる実解析関数に近い滑らかな関数のクラスの初期値に対しては、エネルギーが時間発展に対して有限にとどまる場合がある。」
 これは、各周波数成分のエネルギーが保存される通常の波動方程式の持つ性質とは異なり、周波数間でエネルギーが遷移する変数係数波動方程式特有の現象である。(下図は変数係数波動方程式において初期エネルギー分布関数 $E(0, \xi)$ が時間発展で $E(t, \xi)$ に変化する様子を表したものである。)



(3) 時間に依存する質量を持つクライン・ゴルドン型方程式のエネルギー評価：

通常のクライン・ゴルドン方程式の質量は正定数で与えられ、エネルギー保存則が成り立つ。しかし、質量が時間に依存する場合には一般にエネルギーは保存されず、例えば[DKR]によると時間発展で減衰や発散が起こり得ることが知られている。このような問題に対して、本事業では(2)の研究で発展させた時間周波数領域における解の精密な評価と、振動する係数を持つリッカチ形常微分方程式の解表現とその精密な評価を用いて、既知の手法では評価が困難であった質量が時間に依存し符合変化を伴って振動するモデルに対して、エネルギーの漸近安定性評価を導いた。

〔引用文献〕

- [DKR] Del Santo, D., Kinoshita, T., and Reissig, M., Klein-Gordon type equations with a singular time-dependent potential. *Rend. Istit. Mat. Univ. Trieste* 39 (2007), 141-175.
 [M] Manfrin, R., Global solvability to the Kirchhoff equation for a new class of initial data, *Port. Math. (N.S.)*, 59 (2002), 91-109.
 [N] Nishihara, K., On a global solution of some quasilinear hyperbolic equation, *Tokyo Journal of Mathematics*, 7 (1984), 437-459.

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

〔雑誌論文・査読有〕(計 5 件)

- [H1] Hirosawa, F., On the energy estimate for Klein-Gordon type equations with time dependent singular mass. *Proceedings of the 11th ISAAC 2017, Trends in Mathematics, Research Perspectives*, Birkhauser /Springer (印刷中).
 [H2] Hirosawa, F. and Nascimento W. N., Energy estimates for the Cauchy problem of Klein-Gordon type equation with non-effective and very fast oscillating time-dependent potential, *Ann. Mat. Pura Appl.* 197 (2018), 817-841.
 DOI: 10.1007/s10231-017-0705-9
 [H3] Ebert, M. R., Fitriana, L. and Hirosawa, F., A remark on the energy estimates for wave equations with integrable in time speed of propagation. *New trends in analysis and interdisciplinary applications*, 481-488, *Trends Math. Res. Perspect.*, Birkhauser/ Springer, Cham, 2017.
 DOI: 10.1007/978-3-319-48812-7_61
 [H4] Ebert, M. R., Fitriana, L. and Hirosawa, F., On the energy estimates of the wave equation with time dependent propagation speed asymptotically monotone functions, *J. Math. Anal. Appl.* 432 (2015), 654-677.
 DOI: 10.1016/j.jmaa.2015.06.051
 [H5] Hirosawa, F., A class of non-analytic functions for the global solvability of Kirchhoff equation, *Nonlinear Anal.* 116 (2015), 37-63.
 DOI: 10.1016/j.na.2014.12.016

[学会発表](計 22 件)

廣澤史彦, 振動する係数を持つ 2 階弱双曲型方程式の C^∞ 無限級適切性について, 函館偏微分方程式研究集会, 2017.

Hirosawa, F., On the well-posedness for second order hyperbolic equations with time dependent oscillating coefficients, 11th ISAAC Congress, 2017.

Hirosawa, F., On the well-posedness for second order hyperbolic equations with time dependent Coefficients, Freiberg 工科大学解析セミナー, 2017.

廣澤史彦, Energy estimates for the Cauchy problem of Klein-Gordon type equation with time dependent potential, 日本数学会秋季総合分科会 関数方程式分科会 一般公演, 2016.

廣澤史彦, 変数係数波動方程式の初期値問題の解析とその応用, 南大阪応用数学セミナー, 2015.

廣澤史彦, 時間に依存する係数を持つ波動方程式の解析とその応用, 日本数学会秋季総合分科会 関数方程式分科会 特別講演, 2015.

Hirosawa, F., On the energy estimates for the wave equations with decaying propagation speed, 10th ISAAC Congress, 2015.

Hirosawa, F., A class of non-analytic functions for the global solvability of Kirchhoff equation, The 10th AIMS Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications, 2014.

6. 研究組織

(1) 研究代表者

廣澤 史彦 (HIROSAWA, Fumihiko)
山口大学・大学院創成科学研究科・教授
研究者番号: 50364732