

平成 30 年 5 月 16 日現在

機関番号：24403

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2014～2017

課題番号：26400174

研究課題名(和文) 時間遅れをもつ積分方程式の定性理論の構築とその応用

研究課題名(英文) Qualitative theory of integral equation with delay and its application

研究代表者

松永 秀章 (Matsunaga, Hideaki)

大阪府立大学・工学(系)研究科(研究院)・教授

研究者番号：40332960

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,600,000円

研究成果の概要(和文)：研究代表者らが構築した相空間における積分方程式の解の表現公式を活用して、無限の時間遅れをもつ非線形積分方程式に対する中心多様体定理を確立し、非双曲型平衡点の安定性について解析することができた。また有限の時間遅れをもつ線形積分方程式の零解の漸近安定条件や無限の時間遅れをもつ非線形積分方程式の解の漸近評価式を与えることができた。さらに時間遅れをもつ差分方程式の漸近安定性や振動性についても多くの研究成果を得ることができた。

研究成果の概要(英文)：In this research we have established center manifold theorem for autonomous integral equations with infinite delay by means of the variation-of-constants formula in the phase space. As an application, we have analyzed the stability of nonhyperbolic equilibrium of nonlinear integral equations. Also we have presented asymptotic stability conditions for linear integral systems with finite delay, and asymptotic evaluation formulae for nonlinear integral systems with infinite delay. Furthermore we have obtained some necessary and sufficient conditions for asymptotic stability and oscillation of linear delay difference systems.

研究分野：数学解析・関数方程式論

キーワード：時間遅れ 積分方程式 差分方程式 相空間 中心多様体 特性根解析 漸近安定性 振動性

1. 研究開始当初の背景

無限の時間遅れをもつ積分方程式は、特別な場合として人口学に現れる再生方程式を含んでおり、時間遅れをもつ方程式の重要な研究対象の1つである。しかし、その定性理論は時間遅れをもつ関数微分方程式論の豊かな発展と比べて数学的に整備されておらず、関連する多くの課題の解決とともにその定性理論の構築・進展が期待されていた。2012年に Diekmann & Gyllenberg は

O. Diekmann and M. Gyllenberg, Equations with infinite delay: blending the abstract and the concrete, J. Differential Equations, vol.252, pp.819-851 (2012).

において、人口モデルの数学解析に関連して世界に先駆けて無限の時間遅れをもつ積分方程式の定性理論の研究に着手し、双対半群の理論を用いて安定性に関する目覚ましい結果を与えた。彼らの研究に触発されて、研究代表者らも無限の時間遅れをもつ積分方程式やその線形化積分方程式の研究に取り組み、関数解析的アプローチにより、本研究の基礎となる「解半群およびその生成作用素のスペクトルの特徴づけ」、「相空間における積分方程式の解の表現公式」、「相空間の分解成分における解作用素の作用素ノルムの評価式」、「線形積分方程式に対する Formal Adjoint Theory」などを確立した。これらは Diekmann & Gyllenberg の結果を補完するだけでなく、無限の時間遅れをもつ積分方程式の定性理論に欠かせない重要なツールであり、彼らの結果よりも使い勝手の良い研究成果であった。実際、彼らの結果では双対半群の理論を展開したため、中心多様体への射影作用素が明確な形で与えられておらず、中心多様体上に帰着される中心方程式(常微分方程式)を解析するために不可欠な中心多様体の具体的な基底の計算は困難であった。

2. 研究の目的

本研究では、無限の時間遅れをもつ積分方程式の定性理論を構築することを目的とする。得られた研究成果を人口学に現れる再生方程式に応用して、数学的に解明する。また時間遅れをもつ関数方程式の定性理論の発展・応用へ寄与することも目指す。具体的には以下の項目について研究を進める。

- (a) 中心多様体定理と安定性
- (b) 解の漸近評価とリヤプノフ指数
- (c) 特性根解析による漸近安定性
- (d) 再生方程式への応用
- (e) 関数方程式への発展・応用

(a)について、無限の時間遅れをもつ非線形積分方程式に対する中心多様体理論を構築し、非双曲型平衡点の安定性解析を行う。

(b)について、摂動項が十分小さいときに解の漸近挙動を特性根で特徴づける漸近評価とリヤプノフ指数の関係を解明する。

(c)について、特性根解析を用いて、有限の時間遅れをもつ線形積分方程式のすべての解が0に収束するための必要十分条件を時間遅れと係数行列の具体的な関係式で与える。

(d)について、人口学に現れる再生方程式に応用し、人口モデルを数学的に解明する。

(e)について、時間遅れを考慮した微分方程式や差分方程式などへ新たに確立した積分方程式に対する解析手法を発展・応用する。

3. 研究の方法

相空間における積分方程式の解の表現公式やスペクトル解析、相平面解析を駆使して次の研究テーマを遂行する。

(i) 無限の時間遅れをもつ非線形積分方程式の解の安定性と漸近評価について：

相空間における解の表現公式と放物型偏微分方程式に対する中心多様体定理のアイデアを活用して、中心多様体定理を研究協力者(Minh氏)と確立する。

(ii) 有限の時間遅れをもつ線形積分方程式の解の漸近安定性について：

「線形積分方程式の零解が漸近安定であるための必要十分条件は、特性方程式のすべての根の実部が負である」ことを用いて、具体的な漸近安定条件を導出する。複素平面上の特性方程式の根の分布を詳細に調べるために、数式処理ソフトによる視覚情報も活用する。

(iii) 再生方程式および種々の関数方程式への発展・応用について：

連携研究者(杉江氏、壁谷氏)とともに得られた成果を人口学に現れる再生方程式に応用し、数学的知見を与える。また、再生方程式と関数微分方程式を連立した方程式系の安定性解析を行う。さらに、積分方程式を差分方程式に変えて、研究協力者(Pituk氏)と比較研究をする。

4. 研究成果

研究期間全体を通じて、次の主要な研究成果を得ることができた。

(1) 研究代表者らが構築した相空間における積分方程式の解の表現公式を活用して、無限の時間遅れをもつ非線形積分方程式に対する中心多様体定理を確立し、非双曲型平衡点の安定性について解析することができた。

(2) 無限の時間遅れをもつ積分方程式に対して、非線形の摂動項が十分小さいときに解の漸近挙動を特性方程式の根で特徴づける漸近評価とリヤプノフ指数の関係を解明することができた。

(3) 有限の時間遅れをもつ2次元線形積分方程式の解の極限を、特性根解析と Formal Adjoint Theory を活用して完全に分類することができた。特に、解がある定点や周期軌道に漸近するとき、その漸近先を係数行列、時間遅れおよび初期関数を用いて具体的に表示することができた。

- (4) 時間遅れをもつ非線形スカラー差分方程式があるクリティカルな条件を満たす場合、非双曲型平衡点の安定判別法を詳細に解析し、先行研究を改善することができた。
- (5) 2つの時間遅れをもつ2次元線形差分方程式のすべての解が振動するための必要十分条件を、係数行列と時間遅れを用いて具体的に導出し、先行研究を一般化することができた。
- (6) 相平面解析法と背理法を駆使して、時間遅れをもつスカラー非線形差分方程式に対する双対的な振動条件と非振動条件を導出し、先行研究を一般化することができた。
- (7) ある2次元分数型差分方程式の解の表現公式を付随する線形方程式の解を用いて確立した。また大域解の存在条件を初期値によって明確にし、大域解の漸近挙動を分類した。特に先行研究で見逃されていた解の周期性を完全に解明することができた。
- (8) 特性根解析と多項式理論を用いて、2つの時間遅れをもつ2次元線形差分方程式の零解の漸近安定性に関する必要十分条件を時間遅れと係数行列の固有値で具体的に与えることができた。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 4件)

- [1] J. Cermak, J. Jansky, H. Matsunaga, On stability and stabilization of some discrete dynamical systems, *Math. Methods Appl. Sci.*, (2018) (in press) 査読有.
- [2] P. Doi and H. Matsunaga, Oscillation criteria for a difference system with two delays, *Springer Proc. Math. Stat.*, vol.230, pp.285-292 (2018) 査読有.
- [3] H. Matsunaga, Asymptotic representation of solutions of linear autonomous difference equations, *Springer Proc. Math. Stat.*, vol.180, pp.191-199 (2016) 査読有.
- [4] H. Matsunaga, S. Murakami, Y. Nagabuchi and Nguyen Van Minh, Center manifold theorem and stability for integral equations with infinite delay, *Funkcial. Ekvac.*, vol.58, pp.87-134 (2015) 査読有.

[学会発表](計 20件)

- [1] 松永秀章, 土井パティ, 杉江実郎, 時間遅れをもつ非線形差分方程式の振動条件と相平面解析, 日本数学会 2018年度年会函数方程式論分科会, 東京大学, 2018年3月18日.

- [2] H. Matsunaga, Exact stability criteria for delay differential and difference equations, China-Japan Joint Workshop on Ordinary Differential Equation, 大連民族大学, 中国, 2017年11月20日.
- [3] H. Matsunaga, Global behavior of a system of rational difference equations, Japan-China Joint Workshop on Ordinary Differential Equations and Related Topics in Osaka 2017, 大阪府立大学, 2017年9月21日.
- [4] 松永秀章, 微分方程式および差分方程式の解の漸近挙動に対する時間遅れの影響, 第24回さいたま数理解析セミナー, 芝浦工業大学, 2017年8月28日.
- [5] H. Matsunaga, Oscillation criteria for a class of nonlinear delay difference equations by phase plane analysis, ICDDDEA2017: International Conference on Differential & Difference Equations and Applications 2017, Academia Militar, Portugal, 2017年6月7日.
- [6] 松永秀章, ある非線形差分方程式の振動問題と相平面解析, 第43回なかもず解析セミナー, 大阪府立大学, 2017年5月12日.
- [7] 土井パティ, 松永秀章, 杉江実郎, 時間遅れをもつ非線形差分方程式の振動理論と相平面解析, 平成28年度日本数学会中国・四国支部例会, 愛媛大学, 2017年1月22日.
- [8] 河野詳朋, 松永秀章, 線形積分方程式の漸近安定性に関する必要十分条件, 第3回ODE若手セミナー, 岡山理科大学, 2016年12月14日.
- [9] 鈴木理菜, 松永秀章, 一般化フィボナッチ数と分数型差分方程式の解の公式, 第3回ODE若手セミナー, 岡山理科大学, 2016年12月14日.
- [10] 松永秀章, Oscillation criteria for a class of delay difference equations, 常微分方程式の定性的理論ワークショップ, 島根大学, 2016年9月23日.
- [11] 土井パティ, 松永秀章, 2つの時間遅れをもつ線形差分方程式の振動条件, 日本数学会 2016年度秋季総合分科会函数方程式論分科会, 関西大学, 2016年9月15日.
- [12] 松永秀章, 村上悟, 長淵裕, Nguyen Van Minh, Center manifold theorem and stability for integral equations with infinite delay, 日本数学会 2016年度年会函数方程式論分科会, 筑波大学, 2016年3月16日.
- [13] H. Matsunaga, Center manifold theory for integral equations with infinite delay, 時間遅れダイナミクスに関するOne-day workshop, 京都大学, 2015年10月27日.

- [14] H. Matsunaga, Asymptotic representation of solutions of linear autonomous difference equations, Japan-China Joint Workshop on Ordinary Differential Equations and Related Topics in Osaka 2015, 大阪府立大学, 2015年9月24日.
- [15] 樋元一樹, 松永秀章, 時間遅れをもつ線形積分方程式の解の極限, 日本数学会 2015年度秋季総合分科会函数方程式論分科会, 京都産業大学, 2015年9月13日.
- [16] H. Matsunaga, Formal adjoint theory and asymptotic formula of solutions of integral equations with infinite delay, Workshop on Delay Equation, 東京大学, 2015年8月8日.
- [17] H. Matsunaga, Explicit oscillation criteria for a delay difference system, ICDEA2015: International Conference on Difference Equations and Applications, Bialystok University of Technology, Poland, 2015年7月21日.
- [18] 松永秀章, 無限の時間遅れをもつ積分方程式の解の漸近的性質について, 第1回大阪駅前セミナー, 龍谷大学, 2015年1月23日.
- [19] H. Matsunaga, Stability for scalar nonlinear difference equations in a critical case, Japan-China Joint Workshop on Ordinary Differential Equations and Related Topics in Osaka 2014, 大阪府立大学, 2014年10月15日.
- [20] H. Matsunaga, Stability for non-hyperbolic fixed points of difference equations in a critical case, ICDEA 2014: International Conference on Difference Equations and Applications, 武漢大学, 中国, 2014年7月22日.

〔図書〕(計 1件)

- [1] S. Elaydi, Y. Hamaya, H. Matsunaga and C. Poetzsche, Advances in Difference Equations and Discrete Dynamical Systems, Springer Proc. Math. Stat., vol.212, (2017).

〔産業財産権〕

出願状況(計 0件)
なし

取得状況(計 0件)
なし

〔その他〕

ホームページ等

<http://www.ms.osakafu-u.ac.jp/~hideaki/>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

松永 秀章 (Matsunaga, Hideaki)
大阪府立大学・工学研究科・教授
研究者番号: 40332960

(2) 研究分担者

なし

(3) 連携研究者

杉江 実郎 (Sugie, Jitsuro)
島根大学・総合理工学研究科・教授
研究者番号: 40196720

壁谷 喜継 (Kabeya, Yoshitsugu)
大阪府立大学・工学研究科・教授
研究者番号: 70252757

(4) 研究協力者

Nguyen, Van Minh
コロンプス州立大学・米国・教授

Pituk, Mihály

パンノニア大学・ハンガリー・教授