2版

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ３０ 年　 ９ 月　 ９ 日現在

機関番号：２４５０６
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2014～2017
課題番号：２６４００１７５
研究課題名（和文）相対論的作用素のスペクトル理論と固有値問題

研究課題名（英文）Spectral analysis and eigenvalue problems for relativistic operators

研究代表者
楳田　登美男（Umeda, Tomio）

兵庫県立大学・物質理学研究科・教授

研究者番号：２０１６０３１９

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,600,000円

研究成果の概要（和文）：現代科学技術の根幹をなす量子力学（小は半導体チップから大は宇宙科学に及ぶ）の理論的研究において重要な相対論的作用素を研究した。
　ディラック作用素、相対論的シュレディンガー作用素（電子のエネルギー状態を記述するシュレディンガー作用素に相対論的補正を加味した作用素）のエネルギーについて研究した。ディラック作用素については、質量を持たない粒子のエネルギー状態に隙間がないことを確認する数学的研究を行った。相対論的シュレディンガー作用素についてはエネルギー・ゼロが固有値であるか否かが、ゼロの周辺エネルギーについて大きな影響を及ぼすことを示した。

研究成果の概要（英文）：This project is about spectral analysis of relativistic operators, which plays important roles in theoretical investigation of quantum mechanics, the essence of modern sciences and engineerings. In particular, focused are low energy states of quantum particles under relativistic effect.
 Dirac and relativistic Schroedinger operators, each of which is a relativistic modification of the Schroedinger operator, describing energy states of particles, are examined to explore their energy spectra. It was shown that the spectrum of massless Dirac operators with "any" potentials has no gap. As for relativistic Schroedinger operators, it was obtained that whether the zero energy is an eigenvalue (the energy state of the particle bound to the nucleus) or not is dominant in the states of the particle with low energy.

研究分野：スペクトル理論

キーワード：スペクトル解析　ディラック作用素　シュレディンガー作用素　相対論的シュレディンガー作用素　固有値問題

1. 研究開始当初の背景

21 世紀に入って再発見されたグラフェン（炭素原子で出来た紙状の素材で, 特異な物理的性質と産業応用の大きな可能性で注目されている）の理論的根拠となるのがディラック作用素であるが, グラフェンへの応用を支持するような数学的研究が少なかった。また, シュレディンガー作用素の埋め込まれた固有値は理論的に半導体と関連していることが 1992 年のネイチャー誌で発表されたが, この作用素の埋め込まれた固有値に関する数学的研究は 40 年以上途絶えた状態であった。相対論的シュレディンガー作用素もディラック作用素もシュレディンガー作用素に相対論的補正を施したものであるが, シュレディンガー作用素とは異なり, その散乱理論と低エネルギー領域での研究は少なかった。

2. 研究の目的

ディラック作用素に関しては, 広範なクラスのポテンシャルに対してスペクトル・ギャップの非存在の確認を目的とした。これは物理学の文献において, グラフェンのスペクトルがゼロ・ギャップであると信じられていた状況がある一方, そのポテンシャルの明瞭な数学的表式がなかったからである。相対論的シュレディンガー作用素に関しては, この作用素に対する散乱理論を構築し, 散乱作用素の低エネルギーでの挙動を調べること, また, その前段階として, 埋め込まれた固有値について調べることを目的とした。シュレディンガー作用素の埋め込まれた固有値は当初の研究では目的としていなかった。

3. 研究の方法

ディラック作用素に関しては, よく研究されている 1 次元ディラック作用素の知見と手法を取り入れて, 球対称ポテンシャルの場合に適用した。球対称でない場合は, シュノルの定理をディラック作用素に対して新たに証明し, これを応用した。シュレディンガー作用素の埋め込まれた固有値の生成については, 逆スペクトル問題の手法に着想を得た。相対論的シュレディンガー作用素の散乱理論の構築には, 伸縮群の性質を用いてレゾルベント解析に依拠した。

4. 研究成果

本研究の対象は 2 つある : 1 つは質量ゼロの粒子を記述するディラック作用素であり, 他は質量ゼロの粒子を記述する相対論的シュレディンガー作用素である。どちらの作用素も, 量子力学の基礎方程式であるシュレディンガー作用素を相対論的に補正したものである。これら 2 つの作用素のスペクトル的性質を調べるのが本研究の目的であった。副産物として, シュレディンガー作用素に関して新しい知見が得られた。やや専門的になるが, 以下に研究成果を詳述する。

<u>ディラック作用素</u>

1) 電場のポテンシャル q をもつディラック作用素は, たいていの場合においてスペクトル・ギャップを持たないことを示した, すなわち, ディラック作用素のスペクトルは実軸全体に一致することを示した。明確に述べるために, 定理としてまとめる（文献 [1], [2] 参照）:

定理 1. ポテンシャル q は $q \in \mathsf{L}^2_{loc}(\mathbb{R}^3;\mathbb{R})$ を満たすものとする, すなわち, q は実数値関数であって, かつ局所 2 乗可積分であるとする. $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は 3 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$ の単位ベクトルの列, $(B_{r_n}(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ は中心が $a_n \in \mathbb{R}^3$ であって, 半径が $r_n \to \infty$ $(n \to \infty)$ の球, さらに 2 乗可積分関数の列 $\eta_n : (-r_n, r_n) \to \mathbb{R}$

$(n \in \mathbb{N})$ が存在して

$$r_n^{-3} \int_{B_{r_n}(a_n)} \left| q(x) - \eta_n\big((x-a_n)\cdot k_n\big)\right|^2 dx \\ \to 0 \qquad (n \to \infty)$$

が成り立っているとする。このとき, $\sigma(H_3) = \mathbb{R}$ である。ここで H_3 は

$$(-i\alpha \cdot \nabla + q)\big|_{C_0^\infty(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^4)}.$$

の任意の自己共役拡張とする。

文献 [1], [2] 参照では, さらに, スペクトルの中に埋め込まれた固有値が現れるとすれば, その固有値はポテンシャル q の空間無限遠方での挙動に大きく影響されることを次の 2 つの状況下で解明した：

a) ポテンシャル q が原点からの距離 $r = |x|$ の関数の場合 — q が r の関数として無限遠方で極端に過激な振る舞いをしない限り, 埋め込まれた固有値と q の無限遠方での挙動の関係が見いだせることを示した。

b) ポテンシャル q が原点からの距離 $r = |x|$ の関数とは限らない場合 — ディラック作用素に対してヴィリアル定理を証明し, これを用いて $q(x)$ の無限遠方での振る舞いから定まる一定の区間の中にだけ埋め込まれた固有値が現れることを示した。

2) 電場のポテンシャル q をもつディラック作用素に対して, シュノルの定理を証明した。この成果では q に対する制約条件が非常に緩やかなものであって, 1) で得られた成果の改善につながった。定理として述べる（文献 [1], [2] 参照）:

定理 2. ポテンシャルは $q \in \mathsf{L}^2_{loc}(\mathbb{R}^3;\mathbb{R})$ を満たす。λ を実数とする。f は恒等的にゼロでない $\mathbb{R}^3$ 上の可測関数であって, しかも多項式有界であり, 次の等式を超関数の意味で満たしている：

$$(-i\alpha \cdot \nabla + q)f = \lambda f. \tag{1}$$

このとき, $\mathrm{Dom}(H_3) \supset \mathsf{H}^1(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^4) \cap \mathrm{Dom}(q)$ を満たす任意の自己共役拡張 H_3 に対して, $\lambda \in \sigma(H_3)$。

シュレディンガー作用素

シュレディンガー作用素は数学的にはディラック作用素と大きく異なっているが, 1) の研究遂行中に偶然の副産物が得られた。具体的には, 複素数値のフォン・ノイマン-ウィグナー型ポテンシャルを持つシュレディンガー作用素に対して, 埋め込まれた固有値の構成に関する着想を得た。成果は, 任意個数の埋め込まれた固有値を任意の場所にもつポテンシャルの存在を示したことである。フォン・ノイマン-ウィグナー型ポテンシャルには長い研究の歴史があるが, 複素数に値をとるポテンシャルが研究対象とされたのは本研究が最初である。得られた成果を定理の形で述べる（文献 [3] 参照）:

定理 3. $A = \mathsf{Diag}(a_1, \cdots, a_n)$ を $n \times n$ の対角行列とする。ただし, $a_j \in \{z \in \mathbb{C}^* \mid \Re(z) \geq 0\}$。このとき, $\big(A + G(r)\big)$ は 任意の $r \geq 0$ に対して正則行列であって,

$$v(r) := -\big(A + G(r)\big)^{-1} s(r),$$
$$V(r) := 2\Big(\sum_{j=1}^n \sin(\mu_j \cdot)\, v_j(\cdot)\Big)'(r),$$

とおくとき, 次が成り立つ:

(i) $V \in L^\infty(\mathbb{R}_+) \cap C^\infty\big([0,\infty)\big)$ であって, $r \to \infty$ のとき

$$V(r) = -\frac{4}{r}\sum_{j=1}^n \mu_j \sin(2\mu_j r) \\ + \frac{8}{r^2}\Big(\sum_{j=1}^n a_j\, \mu_j \sin(2\mu_j r) \\ + W(r)\Big) + O(r^{-3}), \tag{2}$$

ここで W は次で定められる実数値関数

$$W(r) = \Big(\sum_{j=1}^{n} \sin^2(\mu_j r) \Big)^2 + 2 \sum_{i,j=1}^{n} h_{ij}(r)\, \mu_i \sin(\mu_j r) \cos(\mu_i r).$$

(ii) 各番号 $j \in \{1, \ldots, n\}$ に対して, v の j 番目の成分 v_j は $v_j \in C^\infty\big([0,\infty)\big)$ であり, しかも $|v_j(r)| \le \mathrm{Const.}\frac{r}{1+r^2}$, $r \in \mathbb{R}_+$ を満たす。さらに v_j は微分方程式 $\big(-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2} + V \big) v_j = \mu_j^2 v_j$ を満たす。すなわち, v_j は $L^2(\mathbb{R}_+)$ における $-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2} + V$ のディリクレ自己共役実現の定義域に属する。

相対論的シュレディンガー作用素

質量がゼロの場合の相対論的シュレディンガー作用素のゼロ・エネルギと低エネルギーに対して, スペクトル的性質の解明を行なった（文献 [4] 参照）。得られた成果を下記の 1)～４）に纏めた。

1) ゼロが固有値でなければ, ゼロの近くに埋め込まれた固有値は存在しないことを示した。すなわち,

定理 4. ポテンシャル V は実数値であって, 不等式 $|V(x)| \le Const.(1+|x|)^{-\sigma}$, $\sigma > 5/2$, を満たし, しかも $0 \notin \sigma_p(\sqrt{-\Delta} + V)$ が成り立っているとする。このとき定数 $\lambda_0 > 0$ が存在して $[0, \lambda_0) \cap \sigma_p(\sqrt{-\Delta} + V) = \emptyset$。

このことから, ゼロに近づく正固有値の無限系列が存在すれば, ゼロ・エネルギーは必然的に固有値になることが導かれる。

2) ゼロ・エネルギーが固有値になるのは稀な現象であることを示した。すなわち, 正固有値の無限系列がゼロに近づく現象は稀であることが導かれる。この現象を次の 2 つの定式化によって示した。

定理 5. $V \in L^3(\mathbb{R}^3;\mathbb{R})$ とする。このとき $0 \notin \sigma_p(\sqrt{-\Delta} + aV)$ がほとんどすべての $a \in \mathbb{R}$ に対して（正確には, $\mathbb{R}$ の離散集合を除くすべての a に対して）成り立つ。

定理 6. ゼロ・エネルギーを固有値として持たないようなポテンシャルの集合 $\mathcal{V} := \{V \in L^3(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}) \mid 0 \notin \sigma_p(\sqrt{-\Delta}+V)\}$ は $L^3(\mathbb{R}^3;\mathbb{R})$ において, 稠密な開集合である。

3) 相対論的シュレディンガー作用素が埋め込まれた固有値を持たないための条件を見出した。すなわち, 次の定理を証明した。

定理 7. ポテンシャルは $V \in C^2(\mathbb{R}^3)$ であって, 遠方で十分速く減衰する。さらに, V はある種の正値条件をみたすとする。このとき, $\sqrt{-\Delta}+V$ は区間 $[0,\infty)$ において絶対連続である。とくに, $\sqrt{-\Delta}+V$ 埋め込まれた固有値を持たない。

4) ポテンシャルが遠方で十分速く減衰する場合に, 波動作用素の存在と完全性を示し, 波動作用素, および散乱作用素の低エネルギー極限についての成果を得た。以下の定理 8～10 において, $\{U_\tau\}_{\tau\in\mathbb{R}}$ は伸縮群を表すものとする。

定理 8. ポテンシャル V は実数値であって, 不等式 $|V(x)| \le Const.(1+|x|)^{-\sigma}$, $\sigma > 3$, を満たす。$\sqrt{-\Delta}+V$ の埋め込まれた固有値がゼロ・エネルギーに収束することはないとする。さらに, ゼロ・エネルギーにテクニカルな仮定を課す。このとき, $f \in \mathcal{H}_s \cap L^\infty(\mathbb{R}^3)$, $g \in \mathcal{H}_s$,（ただし $s > 3/2$） が $E_0([a,b])g = g$ ある区間 $[a,b] \subset (0,\infty)$ において成り立つならば, 次

の等式が成り立つ：

$$\lim_{\tau\to-\infty}\left\langle f,\big(U_{-\tau}W_\pm(H,H_0)U_\tau-1\big)g\right\rangle_{\mathcal{H}}=0$$

定理 9. 定理 8 と同じ条件のもと, 次の等式が成り立つ：

$$s-\lim_{\tau\to-\infty}U_{-\tau}W_\pm(H,H_0)U_\tau=1.$$

定理 10. 定理 8 と同じ条件のもと, 次の等式が成り立つ：

$$s-\lim_{\tau\to-\infty}U_{-\tau}SU_\tau=1.$$

5. 主な発表論文

〔雑誌論文〕（計４件）

[1] K.M. Schmidt and T. Umeda; Spectral properties of massless Dirac operators with real-valued potentials, RIMS Kôkyûroku Bessatsu, 査読有, **B45** (2014), 25 - 30

[2] K.M. Schmidt and T. Umeda; Schnol's theorem and spectral properties of massless Dirac operators with scalar potentials, Lett. Math. Phys., 査読有, **105** (2015), 1479 - 1497
DOI:10.1007/s1 1005-015-0799-1

[3] S. Richard, J.Uchiyama and T. Umeda; Schrödinger operators with n positive eigenvalues: an explicit construction involving complex valued potentials, Proc. Japan Acad., 査読有, **92**, Ser.A (2016), 7 - 12
DOI: 10.3792/pjaa.92.7

[4] S. Richard and T. Umeda; Low energy spectral and scattering theory for relativistic Schrödinger operators, Hokkaido Math. J., 査読有, **45** (2016), 141 - 179

[その他]
ホームページ
http://www.sci.u-hyogo.ac.jp/material/math/umeda-j.html

6. 研究組織

（１）研究代表者
棋田　登美男　(UMEDA, Tomio)
兵庫県立大学・大学院物質理学研究科・教授
研究者番号： 20160319

（２）研究分担者
山岸　弘幸　(YAMAGISHI, Hiroyuki)
東京都立産業技術高等専門学校・ものづくり工学科・准教授
研究者番号： 10448053

（３）研究協力者
Karl M. Schmidt （カール　エム　シュミット）

Serge Richard （セルジュ　リシャール）

内山　淳　(UCHIYAMA, Jun)