

平成 29 年 6 月 2 日現在

機関番号：32675

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2014～2016

課題番号：26400191

研究課題名(和文) モデル理論における新たな構成法の研究

研究課題名(英文) A study on new construction in model theory

研究代表者

池田 宏一郎 (IKEDA, Koichiro)

法政大学・経営学部・教授

研究者番号：60332029

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,100,000円

研究成果の概要(和文)：本研究では、モデル理論における重要な研究対象であるジェネリック構造について調べ、いくつかの結果を得ることができた。まず、ほとんどすべてのジェネリック構造は準モデル完全性をもつことを証明した。また、ジェネリック構造の中にはモデル完全性をもたない例もあるが、どのようなジェネリック構造がモデル完全性をもつかを示す特徴付け定理を得ることができた。さらに、全融合性をもつジェネリック構造は常に安定であることを証明することができた。

研究成果の概要(英文)：The purpose of this study was to improve the Hrushovski construction. Then I proved that every generic structure had near model completeness. On the other hand, there are some generic structures whose theories are not model complete. I obtained a characterization of model completeness in generic structures. Moreover, I proved that any generic structure with the full amalgamation was always stable.

研究分野：数学

キーワード：モデル理論 ジェネリック構造 安定性理論

1. 研究開始当初の背景

(1) 1980年代後半、Hrushovski はモデル理論における重要な二つの予想に反例を与えた。彼の二つの反例は、有限構造を特殊な方法で貼り合わせて無限構造を構成するという共通の方法で作られており、現在ではその構成法はジェネリック構成法と呼ばれている。

(2) ジェネリック構成法は二つの構成法に分類することができる。Hrushovski の元々の構成法は、有限グラフから無限グラフを構成する方法であった。しかしその後、多くの改良がなされ、群や体などの有限生成の代数構造から無限代数構造を作る構成法が作られた。ここでは、前者を古典的構成法と呼び、後者を現代的構成法と呼ぶことにする。

(3) 現在のジェネリック構成法研究の主流は現代的構成法であり、フランスのリヨン大学およびドイツのフライブルグ大学を中心に活発に研究がなされ、Cherlin 予想(代数群に関する予想)の解決に少しずつ近づいている。

(4) 一方、研究代表者は2001年に、古典的構成法を用いて Zilber の予想を解決することに成功した。そこで、古典的構成法にまだ多くの可能性があると考え、その後もその研究を継続してきた。その結果、ジェネリック構造の非飽和性と呼ばれる性質に着目することで、Baldwin 予想を解決することができた。

(5) いままで知られていたジェネリック構造はみな飽和性と呼ばれるとてもよい性質をもっていた。一方、非飽和なジェネリック構造は扱うことが難しいと考えられ、その具体例もほとんど知られていない状態であった。しかし、先に述べた Baldwin 予想の解決により、研究代表者は現代的構成法による非飽和ジェネリック構造の研究に大きな可能性があると考え、新たな構成法の構築という本研究の着想を得た。

2. 研究の目的

(1) 本研究では、モデル理論における新しい構成法を構築することを目標とし、さらには未解決予想の反例を与えることを最終目標とする。具体的には、次の二つの目標を設定する。

(2) 目標1は「非飽和ジェネリック構造の解析」である。目標1の研究対象である非飽和ジェネリック構造は、研究代表者の例以外はほとんど知られておらず、ほぼ未知の対象である。しかしながら、それらの公理には複雑さの階層があることが、研究代表者の最近の研究によりわかってきた。そこで、まずは、古典的構成法による非飽和ジェネリック構造に対してその公理の複雑さを解析し、次に、現代的構成法による非飽和ジェネリック構造の解析を進める。

(3) 目標2は「Lachlan 予想の解決」である。目標2では、非飽和ジェネリック構造を用いて Lachlan 予想の反例を与えることを目標

とする。ゲーデルの完全性定理より、どんな公理系も可算モデル(公理系を満たす可算構造)をもつことがわかるが、さらにその個数にまで言及した予想が Lachlan 予想である。いくつかの理由から、この予想の反例が存在するならば、目標1で解析した対象が反例の候補になる可能性が高いと考える。しかし、反例が見つかる可能性が低いと判断したときには、Lachlan 予想が成り立つための条件をさがす方向に目標を変更する場合もある。

3. 研究の方法

(1) 本研究では、最終的に Lachlan 予想の解決に近づくために、段階的に二つの目標(目標1、目標2)を設定した。これらの目標を達成するために必要な知識を4項目に分類し、それらの知識を提供する4名(連携研究者2名、研究協力者2名)と研究代表者からなる研究体制を組織する。

(2) この研究体制で効率的に研究を進めるために、3つのタイプの集会(研究会、国内研究集会、海外研究集会)を軸に、研究打ち合わせおよび研究発表を行っていく。そして、最終的に得られた結果の客観的評価を確認するため、最終年度に国内研究集会を開催する。

(3) 目標1は研究期間内に充分達成可能であると考えますが、目標2は達成できない可能性もある。しかし、研究計画が予定通りに進まない場合は、途中段階での目標達成が研究成果に結びつくよう、配慮して計画が組まれている。

4. 研究成果

(1) 理論が準モデル完全であるとは、任意の論理式が Σ_1 論理式のブール結合と同値になることである。疎ランダムグラフの理論は準モデル完全になることが知られている(Baldwin-Shelah)。研究代表者はこの事実を一般化することを試みた。理論が超均質性をもつとは、十分大きなモデルの中で閉かつ同型な部分構造の同型写像がモデルの自己同型写像に拡大できることである。疎ランダムグラフの理論は超均質性をもつ。さらには、知られているジェネリック構造の理論の多くは超均質性をもつ。よって超均質性は不自然な仮定ではない。そこで研究代表者は「超均質性をもつジェネリック構造の理論は準モデル完全になる」という結果を得ることができた(論文②)。

(2) 理論のモデル完全性は、モデル理論における重要かつ基本的な概念であり、多くの例のモデル完全性が調べられている。研究代表者は、特にジェネリック構造のモデル完全性について調べ、特徴づけ定理を得ることができた(論文⑤)。当初の目標は、この定理を用いて、Hrushovski の強極小構造のモデル完全性を示すことにあったが、この目標はまだ達成していない。しかし、研究の過程でいくつかの部分的結果を論文③にまとめた。

(3) ジェネリック構造のよく知られた例として疎ランダムグラフがあり、その理論は安定になることが知られている。その証明は Baldwin-Shi によるが、研究代表者はこの結果の一般化を試みた。疎ランダムグラフは全融合性と呼ばれる性質をもつ。そこで「全融合性をもつジェネリック構造は安定になる」という結果を得ることができた(論文①)。
(4) モデル理論の有名な未解決問題のひとつに Lachlan 予想(安定な Ehrenfeucht 理論が存在しないという予想)がある。この予想に反例に近い例として Herwig のジェネリック構造が知られているが、この例は予想の反例がもつべき重要な性質を満たしていない。研究代表者はこの性質をもつ理論を「非対称性タイプをもつ理論」と呼び、得られた結果を研究集会等で発表した(学会発表①, ②, ③)。現在はこの性質をもつ例を構成することを試みているが、もしこの研究が成功すれば、Lachlan 予想の研究に大いに貢献すると考える。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計5件)

- ① K. Ikeda, A remark on generic structures with the full amalgamation property, 京都大学数理解析研究所講究録 2002 (2016), 54-60, 査読無
- ② K. Ikeda, Near model completeness of generic structures, 京都大学数理解析研究所講究録 1938 (2015), 4-9, 査読無
- ③ K. Ikeda, Some questions concerning ab initio generic structures, Proceedings of the 13th Asian Logic Conference, World Scientific (2015), 105-113, 査読有
- ④ K. Ikeda and H. Kikyo, Model complete generic structures, Proceedings of the 13th Asian Logic Conference, World Scientific (2015), 114-123, 査読有
- ⑤ K. Ikeda, Generic structures and model completeness, 京都大学数理解析研究所講究録 1888 (2014) 28-34, 査読無

[学会発表] (計16件)

- ① 池田宏一郎, 安定かつ small な理論に関する注意, 日本数学会年会, 首都大学東京(東京都八王子市南大沢), 2017年3月24日
- ② 池田宏一郎, Some remark on generic structures, 鹿児島モデル理論研究集会, 鹿児島国際大学(鹿児島県鹿児島市坂之上), 2017年3月10日
- ③ K. Ikeda, Some questions concerning small stable theories, RIMS 研究集会「モデル理論における独立概念と次元の研究」, 京都大学数理解析研究所(京都府京都市左京区北白川追分町), 2016年12月14日
- ④ 池田宏一郎, 全融合性に関する注意, 日

本数学会秋季総合分科会, 関西大学千里山キャンパス(大阪府吹田市山手町), 2016年9月18日

⑤ 池田宏一郎, Hrushovski の融合法, 数学基礎論サマースクール, 早稲田大学西早稲田キャンパス(東京都新宿区大久保), 2016年9月5日-7日

⑥ 池田宏一郎, 非飽和ジェネリック構造に関する注意, 日本数学会年会, 筑波大学(茨城県つくば市天王台), 2016年3月16日

⑦ K. Ikeda, A remark on generic structures, RIMS 研究集会「モデル理論における独立概念と次元の研究」, 京都大学数理解析研究所(京都府京都市左京区北白川追分町), 2015年12月16日

⑧ 池田宏一郎, SOP3 をもつジェネリック構造, 日本数学会秋季総合分科会, 京都産業大学(京都府京都市北区上賀茂本山), 2015年9月15日

⑨ 池田宏一郎, ジェネリック構造のモデル完全性, モデル理論夏の学校, 法政大学市ヶ谷キャンパス(東京都千代田区富士見), 2015年8月24日

⑩ K. Ikeda, On near model completeness of generic structures, Logic Colloquium 2015, University of Helsinki (Helsinki, Finland), 2015年8月5日

⑪ 池田宏一郎, 桔梗宏孝, モデル完全でないジェネリック構造, 日本数学会年会, 明治大学(東京都千代田区神田駿河台), 2015年3月21日

⑫ 池田宏一郎, ジェネリック構造の準モデル完全性, 日本数学会年会, 明治大学(東京都千代田区神田駿河台), 2015年3月21日

⑬ K. Ikeda, On generic structures with SOP₃, RIMS 研究集会「モデル理論における独立概念と次元の研究」, 京都大学数理解析研究所(京都府京都市左京区北白川追分町), 2014年11月27日

⑭ 池田宏一郎, ジェネリック構造の単純性と強順序性, 日本数学会秋季総合分科会, 広島大学(島根県松江市西川津町), 2014年9月28日

⑮ 池田宏一郎, On near model completeness of generic structures, モデル理論夏の学校, 筑波大学(茨城県つくば市天王台), 2014年9月15日

⑯ K. Ikeda, A remark on model completeness of generic structures, 招待講演, Classification Theory Workshop, NIMS(Daejeon, Korea), August 6, 2014

[図書] (計0件)

[産業財産権]

○出願状況(計0件)

○取得状況(計0件)

6. 研究組織

(1) 研究代表者

池田 宏一郎 (IKEDA, Koichiro)

法政大学・経営学部・教授

研究者番号：60332029

(2) 研究分担者

なし

(3) 連携研究者

坪井 明人 (TSUBOI, Akito)

筑波大学・数理物質科学研究科・教授

研究者番号：30180045

桔梗 宏孝 (KIKYO, Hirotaka)

神戸大学・工学研究科・教授

研究者番号：80204824

(4) 研究協力者

John T. BALDWIN

Frank O. WAGNER