

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 29 年 6 月 13 日現在

機関番号：13301

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2014～2016

課題番号：26400195

研究課題名(和文) 変分型亀裂進展モデルの数学解析と数値解析

研究課題名(英文) Mathematical and Numerical Analysis for Variational Crack Propagation Model

研究代表者

木村 正人 (Kimura, Masato)

金沢大学・数物科学系・教授

研究者番号：70263358

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,500,000円

研究成果の概要(和文)：本研究では、研究代表者が提案している変分型の亀裂進展モデルと関連する移動境界モデルについて、解の存在や収束性・安定性などの数学解析を行い、強固な数理モデルの基礎付け、数値シミュレーション手法の開発、と同時に新たな数学解析手法の確立を目指した。亀裂進展モデルの持つ勾配構造を明らかにし、簡略化されたPDEモデルに対して、解の一意存在性を示した。また、関連する弾性バネ・ブロック系、転位運動のフェーズフィールドモデル、自由境界問題に対する形状最適化アプローチ、変分型クリスタライン法による雪の結晶成長モデル、などについてもその勾配構造に基づいた数学解析、数値解析、数理モデリングなどをそれぞれ行った。

研究成果の概要(英文)：In this research project, we considered a variational crack propagation model which the principal investigator proposed and some related moving boundary problems. We tried to establish the foundations of mathematical tools and mathematical modeling using their variational structure such as the gradient flow structure. Some efficient numerical schemes for them are also proposed. Additionally, we also studied related other topics: an elastic spring-block system, a phase field model of dislocation dynamics, a shape optimization approach to free boundary problems, a snow flake growth model by variational crystalline method, from the viewpoints of mathematical and numerical analysis and mathematical modeling based on their variational structures.

研究分野：応用数学

キーワード：亀裂進展モデル 変分型モデリング 自由境界問題 最適形状設計 クリスタライン法 転位 弾性体
バネ・ブロック系

1. 研究開始当初の背景

弾性体内の亀裂進展および破壊現象は、古くから理工学で研究の対象とされてきた。最近でも、地震などの自然災害下での建造や、電子部品の塊とも言われる最近の自動車様々な日常生活で使用されるスマートフォンに代表される精密機器の耐久性およびメンテナンスの問題から、その重要性がますます大きくなっている。実際、工学では、様々な数値シミュレーション技法の提案がなされ、いくつかの重要な実用技術に応用されるようになってきている。その一方、それらの数学解析・数学的数値解析は、ほとんど手のついていないのが現状で、科学技術の基盤たる使命にある数学の重要な課題である。

亀裂および破壊の問題における数学的難しさは、多くの場合連続体における不連続性の取り扱いに起因する。数学的に言えば、偏微分方程式に現れる不連続性・特異性ということになり、測度論的な弱解としての取り扱いかまたは何らかの正則化が必要とされる。またこのことが原因で、工学シミュレーションでは、現象のモデリングと離散問題、数値計算アルゴリズムが一体となって混然と提案・研究されており、数学的研究を阻害してきた一因となっている。

2. 研究の目的

本研究計画は、研究代表者が提案している変分型の亀裂進展モデルと関連する移動境界モデルについて、解の存在や収束性・安定性などの数学解析を行うことにより、強固な数理モデルの基礎付け、工学などへ応用可能な数値シミュレーション手法の開発、と同時に新たな数学解析手法の確立を目指すものである。本研究は、モデリング・シミュレーション・解析の3つの側面からの数学研究手法と、研究代表者独自のアイデアである数理モデル：亀裂進展フェーズフィールドモデル、バネ・ブロック系破壊モデル、変分構造保存型離散版移動境界モデル、を研究対象とするところに特徴と独自性がある。

3. 研究の方法

厳密な数学解析と、理論に裏打ちされた数値解法による数値実験を併用し、現象の数理モデリングや応用につながる研究を行う。そのためには、多くの応用数学・工学・物理学関係の研究者との交流が欠かせない。

代表者が幹事を務める日本応用数理学会研究部会「連続体力学の数理」を中心に、学会OSや研究集会などを開催し、国内外の関連する数学者および理工学の研究者と研究交流を図る。特に、研究集会「CoMFoS」には、海外から関連する研究者を招聘する。また、海外の国際研究集会で、得られた研究成果を積極的に発表していくとともに、学術雑誌への英語論文投稿を行う。

基礎研究のための応用数学および破壊力学関連書籍を購入し、必要な知識・アイデア

を得るとともに、国内の関連研究者との意見交換の機会を設けて、研究方向をより実効的なものにするための方向修正を施す。

4. 研究成果

- (1) 代表者らが提案している亀裂進展フェーズフィールドモデル(高石・木村モデル)は、エネルギーの勾配構造と亀裂の非修復性という2つの大きな特徴を持っている。この2つの性質を両立して厳密に取り扱うための数学的枠組みを構築する試みとして、より簡略化した同様の性質を持つ単独の非線形放物型偏微分方程式を考え、その強解が時間大域的に一意に存在することを証明した。通常、弱解が出来ない非線形性の強い方程式ではあるが、粘性解は定義可能であるような比較定理の成り立つ系であることをうまく利用し、エネルギー評価と比較定理を組み合わせることで強解を直接構成することに成功した。
- (2) 2Dおよび3Dにおける、有限要素法による高石・木村モデルの数値シミュレーションを行い、亀裂形状との初期亀裂配置や離散パラメータとの関連を数値的に調べた。それにより、モデルの有効性を示唆する結果を得た。
- (3) 亀裂進展の安定性と不安定性の明快な特徴付けの数学的基礎付けをエネルギー理論に基づいて行った。それによると、弾性エネルギーを亀裂面積(長さ)のグラフで表したエネルギー・プロファイルの凸性によって安定性が表されることがわかった。またその応用として、亀裂進展速度のコントロールの問題に取り組み、それまで困難であった亀裂のコントロールの問題に新たな糸口を開いた。
- (4) 代表者らによる離散型破壊モデルのベースとなる線形弾性体のバネ・ブロック系による近似問題の解析を行った。特に、テンソル値バネ定数の隠された対称性を発見し証明した。また、ポアソン比が小さい場合に正定値性が成り立つことを示した。これは、従来バネ・ブロック系の数値計算においてポアソン効果が出にくいという経験的事実を数学的に解き明かしたことになる。
- (5) 亀裂進展モデルと同様のエネルギー勾配によるフェーズフィールドモデルの考え方をを用いて、結晶構造内の転位線(dislocation)のダイナミクスを記述するモデルとして、線形弾性体の枠組みの中で、エネルギー的に破綻のない数理モデルを提案し、その数値計算を行った。さらに本モデルが、転位線に働く仮想力を与える Peach-Koehler の公式とも整合性があることを示した。
- (6) Laplace 方程式で記述される自由境界問題に対し、形状最適化手法による数学的定式化を提案した。等角写像を用い

て, 厳密解の分類とその厳密な証明を与えた. また, 形状最適化問題の有望な数値解法である力法の弱定式化を行い, 有限要素法による数値例によりその有効性を確認した.

- (7) 変分型クリスタライン法を拡張して, 正六角形をウルフ図形とする場合に, 辺の衝突と分裂を許容する新しいクリスタライン法の枠組みを提案し, その数学的性質を調べた. また, 簡略化された雪の結晶成長モデルを提案し, いくつかの数値シミュレーションを行った.

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 9 件)

S. Shioda, A. U. Maharani, M. Kimura, H. Azegami, and K. Ohtsuka: Shape optimization approach by traction method to inverse free boundary problems. *Mathematical Analysis of Continuum Mechanics and Industrial Applications*, Springer (2017) pp.111-123. (査読有り)

V. Chalupceky and M. Kimura: An energy-consistent model of dislocation dynamics in an elastic body. *Mathematical Challenges in a New Phase of Materials Science* (Eds. Y. Nishiura and M. Kotani), Springer (2016) pp.53-68. (査読有り)

塩田青玄, マハラニ・アハサニ・ウンミ, 木村正人, 畔上秀幸, 大塚厚二: 力法を用いた最適形状設計問題のアプローチによる自由境界問題の数値解析. 京都大学数理解析研究所講究録 No.1995 (2016) pp.92-101. (査読無し) <http://hdl.handle.net/2433/224704>

田中智恵, 木村正人: 特異性を持つ多角形運動と雪の結晶成長モデルへの応用. 京都大学数理解析研究所講究録 No.1979 (2015) pp.120-137. (査読無し) <http://hdl.handle.net/2433/224430>

Maharani A. U., M. Kimura, H. Azegami, K. Ohtsuka, and Armanda I.: Shape optimization approach to a free boundary problem. *Recent Development in Computational Science Vol.6*, Kanazawa e-Publishing (2015) pp.42-55. (査読有り) https://www.researchgate.net/profile/Masato_Kimura2/contributions

Armanda I., M. Kimura, T. Takaishi and Maharani A.U.: Numerical construction of energy-theoretic crack propagation based on a localized Francfort-Marigo model. *Recent Development in Computational Science Vol.6*, Kanazawa e-Publishing

(2015) pp.35-41. (査読有り) https://www.researchgate.net/profile/Masato_Kimura2/contributions
H. Notsu and M. Kimura: Symmetry and positive definiteness of the tensor-valued spring constant derived from P1-FEM for the equations of linear elasticity. *Networks and Heterogeneous Media*, Vol.9, No.4 (2014), pp.617-634. (査読有り) doi:10.3934/nhm.2014.9.617

M. Kimura and T. Takaishi: A phase field approach to mathematical modeling of crack propagation. *A Mathematical Approach to Research Problems of Science and Technology, Series of Mathematics for Industry*, Vol.5, Springer (2014) pp.161-170. (査読無し)

doi:10.1007/978-4-431-55060-0_13

H. Azegami, K. Ohtsuka and M. Kimura: Shape derivative of cost function for singular point, Evaluation by the generalized J integral. *JSIAM Letters* Vol.6 (2014) pp.29-32. (査読有り) https://www.jstage.jst.go.jp/article/jsiaml/6/0/6_29/_pdf

https://www.jstage.jst.go.jp/article/jsiaml/6/0/6_29/_pdf

[学会発表](計 11 件)

M. Kimura: Generalized hexagonal crystalline motion with facet collision and breaking and application to a snow flake model: Emerging Developments in Interfaces and Free Boundaries (Oberwolfach Research Institute for Mathematics, Oberwolfach, Germany) January, 22-28, 2017.

M. Kimura: Phase field model for crack propagation and some applications. Japan-Taiwan Joint Workshop on Numerical Analysis and Scientific Computation (Taipei, Taiwan) November, 26-28, 2016.

M. Kimura: Shape optimization approach to free boundary problems by traction method. ICCOPT2016 (Tokyo, Japan) August, 6-11, 2016.

M. Kimura: Applications of a phasefield model for crack propagation. WCCM XII&APCOM VI (Seoul, Korea) July, 24-29, 2016.

M. Kimura: Unidirectional gradient flow and its application to a crack propagation model. Variational Models of Fracture (Banff International Research Station, Banff, Canada) May, 8-13, 2016.

M. Kimura: Shape optimization approach by traction method to an

inverse free boundary problem, CoMFoS15 (Fukuoka, Japan) November 16-18, 2015.

M. Kimura: An irreversible gradient flow and its application to a crack propagation model, ICIAM2015 (Beijing, China) August 10-14, 2015.

M. Kimura: Unidirectional evolution equation of diffusion type and application to a crack propagation model. The 32nd Kyushu Symposium on Partial Differential Equations (Nishijin Plaza, Kyushu University, Fukuoka, Japan) January 28-30, 2015.

M. Kimura: A fracture model on spring-block system with energy gradient structure. RIMS international conference: Mathematical Challenge to a New Phase of Materials Science, (Masukawa Hall, Kyoto University, Kyoto, Japan) August 4-8, 2014.

M. Kimura: An irreversible diffusion equation and a phase field model of crack propagation. The 10th AIMS Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications (Madrid, Spain) July 7-11, 2014.

M. Kimura: Strong solution to irreversible diffusion equation and application to crack propagation model. 8th European Conference on Elliptic and Parabolic Problems (Gaeta, Italy) May 26-30, 2014.

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕

出願状況(計 0 件)

取得状況(計 0 件)

〔その他〕

ホームページ等

<http://ridb.kanazawa-u.ac.jp/public/detail.php?id=4196>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

木村 正人 (KIMURA, Masato)

金沢大学理工研究域数物科学系・教授

研究者番号：70263358