様　式　C－19、F－19－1、Z－19　(共通)

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 29 年　 6 月 12 日現在

機関番号：１６３０１
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2014～2016
課題番号：２６４００２０１

研究課題名（和文）有限要素解析における補間誤差の研究

研究課題名（英文）Study of interpolation error analysis for finite element methods

研究代表者
土屋　卓也（Tsuchiya, Takuya）

愛媛大学・理工学研究科（理学系）・教授

研究者番号：００１６３８３２

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,000,000円

研究成果の概要（和文）：本研究では、三角形および四面体上のLagrange補間について、新しい誤差評価を与えた。Lagrange補間の誤差は、三角形や四面体が”ふっくらしている”（あるいは”平らに潰れていない”）という仮定のもとで誤差評価がなされてきた。本研究では、本質的なのは三角形や四面体の（射影）外接半径であるということを明らかにし、それらが0に収束していけば、たとえ三角形や四面体が平らに潰れていてもLagrange補間の誤差は0に収束するということを示した。
この研究成果は、数値シミュレーションの主要な手法の一つである有限要素法の誤差解析に大きな影響を与えるであろう。

研究成果の概要（英文）：In this study, we have considered the error analysis of Lagrange interpolation on triangles and tetrahedrons (hereafter, we call them "elements"). Usually, the error analysis of Lagrange interpolation is done under the condition that elements are not so degenerate (or not so “flat”). We have found that essential factor of the error estimation is the (projected) circumradius of elements, and presented new error estimations expressed in terms of the (projected) circumradius and the diameter of elements.
According to the newly obtained error estimation, we can say that if the (projected) circumradius of elements converges to 0, the error of Lagrange interpolations also converges to 0, even if elements are become very flat. Therefore, if we use triangulations with such elements, finite element methods would provide reliable numerical solutions.
We believe that the newly obtained error estimation provide a new insights to finite element methods and numerical simulations.

研究分野：数値解析学、偏微分方程式に対する数値解法の数学的基礎

キーワード：誤差解析　関数補間　有限要素法　外接半径

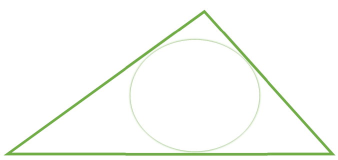
1．研究開始当初の背景

(1) **数値シミュレーション**は現代文明を支える重要な技術であり、**有限要素法** (finite element method) はその数値シミュレーションの主な手法の一つである。有限要素法の特徴は、関数解析的な偏微分方程式論と相性がよく、得られる数値解の誤差を数学的に厳密に評価できる場合が多いことである。

有限要素法を用いて数値シミュレーションを行う場合、まずやるべきことは数値シミュレーションの問題領域を**要素** (element)と呼ばれる図形で充填することである。要素としては、2 次元問題の場合三角形が、3 次元問題の場合四面体が用いられる場合が多い。問題領域を要素に分割することを（その他の図形を要素として用いる場合も）**三角形分割** (triangulation)という。有限要素法を用いた数値シミュレーションで最も難しいのは、問題領域の三角形分割であるといわれている。

(2) 有限要素法で得られる数値解の誤差を数学的に厳密に評価するためには、各要素における関数補間の誤差を評価すればよいことがわかっている。関数補間として一番重要なのは Lagrange 補間と呼ばれるものである。有限要素法で数値解を精度よく求めるためには、つまり Lagrange 補間の誤差を数学的にきちんと評価するためには、用いる要素に何らかの幾何学的条件を課す必要があることが知られている。

一番よく用いられる幾何学的条件は、**正則性条件** (regularity condition)と呼ばれるもので、これは要素の直径（三角形要素の場合は最長辺の長さ）と要素に内接する円、あるいは球の直径との比がある定数以下であるということである。正則性条件のもとでは、あまり平らな（“潰れた”）要素を使うことができないことになる。つまり正則性条件のもとでは、例えば問題領域に非常に細長い部分がある場合は、三角形分割が極めて難しいことになる。



“潰れていない”良い要素

“潰れた”悪い要素

正則性条件のもとでの Lagrange 補間の誤差は次のように表すことができる：

$$|u - \Pi_K u|_{1,p,K} \le C h_K |u|_{2,p,K}$$

ただし $\Pi_K u$は関数 u の三角形 K 上の 1 次 Lagrange 補間、h_Kは三角形の直径（=最長辺の長さ）であり、C は直径と内接円の直径の比に依存する正定数である。（Sobolev 空間のノルムについては説明を省略する。）

三角形要素の場合は、もう一つ**最大角条件** (maximum angle condition) というものが知られている。これは、三角形の最大角が $\pi - D$ 以下であるというものである。例えば直角三角形は全ての内角が 90℃以下なので、どんなに潰れていても最大角条件を満たす。

“潰れているが”悪くない要素

最大角条件のもとでも上と同様な誤差評価が成り立つが、定数 C は上の定数 D に依存して決まる。

以上のように、三角形分割内の要素が正則性条件か最大角条件を満たせば、その三角形分割を用いた有限要素法により得られた数値解の精度が数学的に保障されることがわかっていた。これらの結果が得られたのは、1960 年代の終わりから 1970 年代にかけてであり、現在有限要素法の数学的基礎に関する全ての教科書において、以上のことが説明されている。

2．研究の目的

本研究では、有限要素法の教科書の記述を覆すような、まったく新しい Lagrange 補間の誤差評価の発見を目的とした。そのきっかけとなったのは、共同研究者の一橋大学小林健太准教授（当時）による画期的な誤差評価式の発見であった。彼は、三角形の三辺の長さ A, B, C と面積 S をからなる対称式により Lagrange 補間の誤差を精密に表すことに成功した。

そのため小林准教授は、まず非常に多くの三角形について Lagrange 補間の誤差を数値的に計算し、誤差の挙動を精密に表すことのできる対称式の形を探索した。その後、求めた対称式で全ての三角形上の Lagrange 補間の誤差が評価できることを、**精度保証つき数値計算**を用いて証明した。

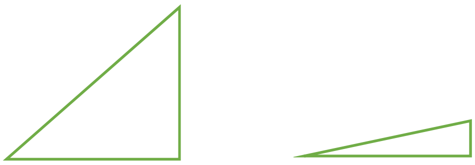
現在、**小林の公式**と呼ばれている評価式を見ると、三角形上の 1 次 Lagrange 補間の誤差は、三角形の**外接半径**（外接円の半径）を用いて表されることがわかる。そこで、土屋は小林准教授と共同で、1 次 Lagrange 補間の誤差を三角形の外接半径を使って表す評価式を、精度保証つき数値計算を用いない“紙と鉛筆による”証明を見出すことを試みた。これが本研究の始まりであった。

その後、三角形や四面体上の高次 Lagrange 補間の誤差評価や三角形上の Crouziex-Raviart 補間の誤差評価について考察してきた。

また、三角形上の Lagrange 補間の誤差評価が曲面の面積の定義という古くからの難問に関連していることを見出し、曲面の面積の定義について考察することも、研究の目的としてきた。

3．研究の方法

研究の方法としては、最大角条件を見出した Babuska-Aziz の論文の手法が我々の目的にとっても有効であることがわかった。**Bavuska-Aziz の手法**とは、直角三角形を垂直につぶしても Lagrange 補間の補間精度は劣化しないことを示すテクニックである。



直角三角形を垂直に潰しても
Lagrange 補間の精度は劣化しない。

Babuska-Aziz の論文では、1 次 Lagrange 補間の場合に証明しているが、我々は高次 Lagrange 補間の場合にも同様な結果が成り立つことを証明した。そのために 1 次元の**差分商** (difference quotient)の議論を 2 次元と 3 次元に拡張した。

任意の三角形は、直角三角形の直角の角度を変更した三角形と相似である。直角の角度を変える変換は、 2×2 行列

$$\begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & t \end{pmatrix}$$

による線形変換である。ただし、$s^2+t^2=1$，かつ$t>0$とする。我々は、Lagrange 補間の誤差がこの行列の特異値により上から評価できることに気が付いた。さらに、その特異値が三角形の外接半径を用いて表すことができることがわかった。この結果は、行列の Kronecker (tensor) 積を使うと、高次 Lagrange 補間の場合に拡張できる。

直角三角形を変換し
任意の三角形と相似な三角形を得る

以上の結果は、三角形上の Lagrange 補間の誤差評価についてであるが、四面体上の Lagrange 補間の誤差についても同様な評価式が得られることがわかった。ただし、四面体については、外接球の半径を考えてもだめで、**射影外接半径** (projected circumradius) と呼ばれる量を考える必要があることがわかった。以下、四面体の射影外接半径について説明する。

四面体の任意の面Bを底面とし、その直径と外接半径をそれぞれh_B, R_Bとする。Bに垂直な平面を考えて、四面体をその平面に垂直に射影する。するとその像は三角形になるので、その像の外接半径を考えることができる。そのような外接半径の最大値をR_Pとする。射影外接半径は、

$$\min \frac{R_B R_P}{h_B}$$

で定義される量である。ただし、min は四面体の 4 つの面についてとる。

4．研究成果

(1) 得られた研究成果は以下の通りである。正整数 k と整数$m, 0 \le m \le k$ 実数$p, 1 \le p \le \infty$を考える。

三角形 K 上の関数f のk次 Lagrange 補間$\Pi_K f$の誤差は、

$$|f-\Pi_K f|_{m,p,K} \le C R_K^m h_K^{k+1-2m} |f|_{k+1,p,K}$$

と評価することができる。ただし、R_Kとh_Kはそれぞれ三角形Kの外接半径と直径である。また、C はk, p, mのみに依存する正定数である。

四面体K上の関数f のk次 Lagrange 補間$\Pi_K f$の誤差も、上とまったく同様な不等式で評価できる。ここで重要なのは、誤差評価の不等式に現れる正定数C が、三角形や四面体の形状にまったく依存しないという事実である。この結果から、有限要素法で使用する三角形分割に対する幾何学的条件で本質的なのは、三角形分割内の（射影）外接半径が0に収束することであることがわかる。この条件を**外接半径条件** (circumradius condition)と呼ぶことにした。

この誤差評価式に現れる定数は、三角形や四面体の形状にまったく依存しない。このような評価式は今まで得られたことがなく、有限要素法の数学的理論や実際の使用に与える影響は非常に大きいと思われる。実際に、この研究に刺激を受け、有限要素法の数学的理論を基礎部分から見直す動きが始まりつつある。

(2) 以上の結果は、曲面の面積の定義という問題に関連があることがわかった。曲線の長さは、近似する折れ線の長さの極限として定義される。それに対して曲面の面積は内接する区分的三角形多面体の面積の極限としては定義できないことが、1880 年代に Schwarz と Peano により示された。彼らは、

現在 **Schwarz の提灯** (Schwarz's lantern) と呼ばれている反例を見出した。

我々は、Schwarz の提灯の面積が円柱の側面積に収束する必要十分条件は、Schwarz の提灯を作る三角形の外接半径が０に収束することであることを見出した。これから、外接半径条件は、曲面の面積の定義においても本質的な条件であることがわかる。

さらに、Crouziex-Raviart 補間で曲面の面積を近似する場合、三角形分割に何の幾何学的条件を課さずに曲面の面積が近似できることがわかった。この結果は、有限要素法の従来の常識を覆すものであり、さらに研究を進める必要がある。また、この研究を契機として、曲面の面積の定義について更なる研究が進むであろう。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 10 件）
以下の論文は全て査読あり

[1] Kenta KOBAYASHI, Takuya TSUCHIYA, Approximating surface areas by interpolations on triangulations, Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics, *to appear*.
DOI: 10.1007/s13160-017-0253-0

[2] Kenta KOBAYASHI,
A recursive formula for the circumradius of the n-simplex, Forum Geometricorum, 16 (2016) 79-184,

[3] Takashi SUZUKI, Takuya TSUCHIYA,
First and second Hadamard variational formulae of the Green function for general domain perturbations, Journal of Mathematical Society of Japan, 68 (2016) 1389-1419,
DOI: 10.2969/jmsj/

[4] Kenta KOBAYASHI, Takuya TSUCHIYA,
Extending Babuska-Aziz's theorem to higher-order Lagrange interpolation, Applications of Mathematics, 61 (2016) 121-133,
DOI: 10.1007/s10492-016-0125-y

[5] Kenta KOBAYASHI, Takeshi OGITA,
Backward error bounds for 2×2 linear systems arising in the diagonal pivoting method, Nonlinear Theory and Its Applications, 6 (2015) 383-390,
DOI: 10.1587/nolta.6.383

[6] Takuya TSUCHIYA, Kensuke AISHIMA,
A note on convergence and a posteriori error estimates of the classical Jacobi method, Nonlinear Theory and Its Applications, 6 (2015) 391-396,
DOI: 10.1588/nolta.6.391

[7] Kenta KOBAYASHI, Takuya TSUCHIYA,
A priori error estimates for Lagrange interpolation on triangles, Applications of Mathematics, 60 (2015) 485-499,
DOI: 10.1007/s10492-015-0108-4

[8] Kenta KOBAYASHI, Takuya TSUCHIYA,
On the circumradius condition for piecewise linear triangular elements, Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics, 32 (2015) 65-76,
DOI: 10.1007/s13160-014-0161-5

[9] Takuya TSUCHIYA,
Finite element approximation of conformal mappings to unbounded Jordan domains, Numerical Functional Analysis and Optimization, 35 (2014) 1382-1397,
DOI: 10.1080/01630563.2013.837482

[10] Kenta KOBAYASHI, Takuya TSUCHIYA,
A Babuska-Aziz type proof of the circumradius condition, Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics, 31 (2014), 193-210,
DOI: 10.1007/s13160-013-0128-y

〔学会発表〕（計１７件）

[1] 小林健太、土屋卓也: 「Approximating surface area by interpolations on triangulations」2017 年 3 月 26 日 日本数学会 2017 年度年会 首都大学東京 南大沢キャンパス（東京都八王子市）

[2] 小林健太、土屋卓也: 「Approximating surface area by interpolations on triangulations」2017 年 3 月 6 日 日本応用数理学会 第 13 回 研究部会連合発表会
電気通信大学（東京都調布市）

[3] Kenta Kobayashi, Takuya Tsuchiya:
「Error Analysis of Lagrange Interpolation on Tetrahedrons」2016 年 9 月 28 日 SCAN2016 Uppsala University, Uppsala, Sweden

[4] 小林健太、土屋卓也: 「Error Analysis of Lagrange Interpolation on Tetrahedrons」2016 年 9 月 18 日 日本数学会 秋季総合分科

会 関西大学千里山キャンパス（大阪府吹田市）

[5] 小林健太、土屋卓也：「Error analysis of Lagrange Interpolation on Tetrahedrons」2016 年 6 月 9 日 第 45 回 数値解析シンポジウム 鹿児島県 霧島温泉郷 霧島ホテル（鹿児島県霧島市）

[6] 小林健太、土屋卓也：「四面体上の Lagrange 補間の誤差評価について」2016 年 5 月 31 日 第 21 回 計算工学講演会,新潟市 朱鷺メッセ 新潟コンベンションセンター（新潟県新潟市）

[7] Aymeric Grodet, 土屋卓也：「A Ritz type algorithm of adaptive mesh refinement for the Poisson equations」
2016 年 3 月 4 日 日本応用数理学会研究部会連合発表会 神戸学院大学ポートアイランドキャンパス（兵庫県神戸市）

[8] Kenta KOBAYASHI, Takuya TSUCHIYA:「A priori error estimates of the Lagrange interpolation on triangles and tetrahedrons」January 14, 2016, Workshop on Numerical Methods of Nonlinear Problems, Tsinghua Sanya International Mathematics Forum, TSIMF, Sanya, P.R. China

[9] 小林健太、土屋卓也：「Babuska-Aziz の定理の拡張について」2015 年 12 月 17 日 応用数学合同研究集会 龍谷大学瀬田キャンパス（滋賀県大津市）

[10] Kenta KOBAYASHI, Takuya TSUCHIYA:「Error Estimates for Lagrange Interpolation on Triangles」2015 年 11 月 22 日 Applications of Mathematics 2015, Czech Academy of Sciences, Prague, Czech Republic

[11] 小林健太、土屋卓也：「Babuska-Aziz の定理の高次 Lagrange 補間への拡張」2015 年 6 月 10 日 第 44 回数値解析シンポジウム 山梨県甲州市 「ぶどうの丘」

[12] 小林健太、土屋卓也：「三角形要素上の関数補間とその誤差について」2015 年 3 月 7 日 日本応用数理学会 2015 年研究部会連合発表会, 明治大学中野キャンパス（東京都中野区）

[13] Kenta Kobayashi,Takuya Tsuchiya:「Error Estimations of Interpolations on Triangular Elements」2014 年 9 月 23 日 SCAN2014, University of Wurzburg, Germany

[14] 小林健太、土屋卓也：「三角形要素上の Lagrange 補間の誤差について」2014 年 9 月 5 日 応用数理学会 2014 年度年会
政策研究大学院大学（東京都港区）

[15] Kenta Kobayashi,Takuya Tsuchiya:「Error estimates for Lagrange interpolations on triangles」2014 年 8 月 26 日 The 5th China-Japan-Korea Conference on Numerical Mathematics,
Ningxia University, Yinchuan, China

[16] Aymeric Grodet, Takuya Tsuchiya:「An efficient algorithm for the Euclidean Steiner tree problem in D-space」2014 年 6 月 24 日 East Asia SIAM conference, Ambassador City Jomtien, Pattaya, Thailand

[17] 小林健太、土屋卓也「三角形要素上の Lagrange 補間の誤差について」 2014 年 6 月 11 日 第 43 回数値解析シンポジウム，ホテル日航八重山（沖縄県石垣市）

〔図書〕（計２件）
[1] 大田雅人、鈴木貴、小林孝行、土屋卓也
「応用数理--基礎・モデリング・解法」
培風館 2015 年 223p

[2] ストラング「ストラング：計算理工学」近代科学社 2017 年 735p.
（土屋翻訳担当：第 3 章 境界値問題 pp.227-315）

６．研究組織
(1)研究代表者
土屋　卓也（TSUCHIYA Takuya）
愛媛大学・大学院理工学研究科・教授
研究者番号：００１６３８３２

(2)研究分担者
小林　健太（KOBAYASHI Kenta）
一橋大学・大学院商学研究科・教授
研究者番号：６０４３２９０２

(3)研究分担者
鈴木　貴（SUZUKI Takashi）
大阪大学・大学院基礎工学研究科・教授
研究者番号：４０１１４５１６