

平成 29 年 6 月 26 日現在

機関番号：17102

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2014～2016

課題番号：26400203

研究課題名(和文) 錐最適化問題を利用した最適化モデリングの提案・開発

研究課題名(英文) Optimization modeling via conic optimization

研究代表者

脇 隼人(Waki, Hayato)

九州大学・マス・フォア・インダストリ研究所・准教授

研究者番号：00567597

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,300,000円

研究成果の概要(和文)：制御理論で議論される $H_\infty$ 制御に現れる行列不等式と、統計で議論される変数選択を中心的に扱った。 $H_\infty$ 制御に関しては、双対問題を軸として議論することで、一般化制御プラントにおける安定な不変零点あるいは虚軸上の不変零点が、行列不等式の悪条件性の原因になっていることを明らかにした。また、この性質を利用した行列不等式の簡略化を考案し、SISOである一般化制御プラントに対する $H_\infty$ 制御に対してこの簡略化が有効であることを確認した。変数選択においては、混合整数非線形計画問題として定式化し、悪条件性の一環であるデータ行列の一次従属性を利用して、より効率の良い分枝限定法を提案し実装した。

研究成果の概要(英文)：We discuss two subjects: (i)  $H_\infty$  control in control theory, and (ii) variable selection in statistics. For (i), we revealed that stable invariant zeros or invariant zeros on the imaginary axis of a given generalized plant causes the ill-conditionedness in the linear matrix inequality (abbr. LMI) of  $H_\infty$  control. Moreover, we propose a reduction of LMI based on stable invariant zeros and apply it to LMI of  $H_\infty$  control with SISO generalized plant. For (ii), we provide an MINLP formulation for variable selection based on optimization, and propose a branch-and-bound algorithm for this formulation. Then we exploit linear dependence in a data matrix to improve the performance of our MINLP formulation.

研究分野：最適化理論

キーワード： $H_\infty$  制御 行列不等式 半正定値計画問題 不変零点 面的縮小法 混合整数非線形計画問題 分枝限定法

## 1. 研究開始当初の背景

意思決定の支援手段の一つとして、最適化の利用が挙げられる。「考慮すべき状況からどの様な選択肢を選ぶと目的関数(例えばコストなど)が最小あるいは最大にできるか?」。これが最適化の利用例である。最適化問題の難しさとしては「大規模」である、ということが挙げられるが、近年の計算機の高性能化により、この難しさは最適化問題を限定すれば克服されつつある。もう一つの難しさは「悪条件」というのが挙げられる。これは最適化問題の本質的な性質に結びついており、計算機パワーでは克服できない難しさである。

一般の最適化問題における「悪条件」の定義はまだ定まっていないが、線形計画問題や、その拡張である錐計画問題では連立方程式に対する「悪条件」と同様に定義されている。本研究課題では、この「悪条件」と最適化問題で考慮されている状況との関係を明確にする。さらに、この関係を利用してこの悪条件性を取り除く手法を検討する。

本研究では、特に錐計画問題の一つである半正定値計画問題を取り扱う。理由は2点あり、後述するように制御理論で用いられている最適化問題の一つである、ということだけでなく、行列を変数とする最適化問題であるため、扱いがより難しい非線形最適化問題だからである。半正定値計画問題について、下記の事実が本研究と関連している。

- (1) 半正定値計画問題は組合せ最適化問題や多項式最適化問題に対して有効に働くが、これらの最適化問題から得られる半正定値計画問題が「悪条件性」を有している場合があり、その場合は、浮動小数点演算を利用した最適値の計算が不正確になることが知られている。
- (2) この「悪条件性」を利用して半正定値計画問題からの「悪条件性」を取り除いた等価な半正定値計画問題を構成することができる。これは、半正定値計画問題の「悪条件性」の特徴づけが鍵となっている。
- (3) (2)に関してアルゴリズムは提案されているが、ほぼ等価な半正定値計画問題をとく必要があり、計算量及び数値精度の観点からそのアルゴリズムを直接適用して良いかは扱う最適化問題に依存する。

特に(3)にあるように、「悪条件性」をなくすアルゴリズムはあるが、それを適用するのが適切でない場合がある。「その場合どうすべきか」、という疑問が本研究の直接の動機である。

## 2. 研究の目的

制御理論で展開されている H 制御と統

計・機械学習で現れる変数選択あるいは特徴選択で現れる混合整数非線形計画問題に対してターゲットを絞り、これらの「悪条件性」の議論とそれを利用した求解法を提案する事が目的である。特に、H 制御については、しばしば数値的に求解が困難な場合があることが言われており、実際、研究成果で述べるように、「悪条件性」が要因の一つであった。

変数選択については、赤池情報量基準(AIC)を用いた線形回帰が混合整数二次錐計画問題として定式化できることが知られているが、データ行列が一次従属であった場合、得られる最適化問題の緩和問題が一次従属な係数行列を持つ二次錐計画問題となる。整数計画に対するソフトウェアがそのような二次錐計画問題を扱えないと数値的に解くことが難しくなる。この一次従属性もこの「悪条件性」に対応している。そこで、混合整数非線形計画問題として定式化して、H 制御と同様に、「悪条件性」を利用した効率良い分枝限定法を開発する。

## 3. 研究の方法

H 制御については、まず半正定値計画問題の「悪条件性」の特徴づけから、制御対象である一般化制御プラントと性質と「悪条件性」の対応を考察する。これにより、一般化制御プラントから「悪条件性」の要因となる事象を取り除けば、「悪条件性」を有さない半正定値計画問題が構成でき、浮動小数点演算でも高精度に計算できるようになる。

変数選択については、混合整数非線形計画問題として定式化しても、分枝限定法で現れる子問題の緩和問題が、連立方程式を解くことで求解できるため、データ行列の一次従属性とうまく対応づけることができる。博士課程の木村圭児氏と議論して、結果をまとめた。またソフトウェアも作成し、「悪条件性」を利用した分枝限定法の挙動も確認する。また、ソフトウェアも公開し、追試可能な状態を目指す。

## 4. 研究成果

(1) H 制御については、半正定値計画問題の「悪条件性」の特徴づけを利用することで、「考慮する一般化制御プラントが安定な不変零点あるいは虚軸上に不変零点を持つ場合、あるいは、直達項が一時従属の場合、現れる半正定値計画問題の双対問題が悪条件性を有すること」を明らかにした。H 制御は対応するプラントの極ではなく零点が影響することが知られているが、このことにうまく対応している。さらにこの悪条件性は対応する半正定値計画問題の双対問題に影響を与え、結果として元の半正定値計画問題が最適解を持たない可能性があることを示唆している。

この性質を利用して、状態フィードバッ

クの場合に対応する一般化制御プラントから不変零点を取り除いた部分システムを構成し、それに対して同様に半正定値計画問題として定式化しても最適値が変わらないことを証明した。これは、半正定値計画問題から「悪条件性」を取り除くよりも簡単である。この手法を乱数で生成したプラントや、サーボシステムに対してそれぞれ適用し、性能が向上することを確認した。これらについては H 状態フィードバックに限定して論文にまとめ、投稿した。

半正定値計画問題に対するソフトウェアが返す解のノルムが極端に大きいものであったのが興味深かった。これは、元の半正定値計画問題が最小値は有限値だが、最小解を持たない問題になっていることを示唆している。一般の状態フィードバック制御では証明できていないが、サーボシステムに対しては、不変零点に対するベクトル(固有ベクトルのようなもの)がある仮定を満たせば、最適解を持たないことを証明した。さらに、サーボシステムに対しては元のシステムの不変零点が1つあるいはふたつの場合に、零点、対応するベクトルとサーボシステムを規定するパラメタで最小値が記述できることを明らかにした。これらの場合、最小値が閉形式で記述できるため、サーボシステムの解析で有用である。これについても論文としてまとめて投稿した。

(2) (1)で明らかにした悪条件性は、半正定値計画問題の言葉で記述すると、関連する双対問題の解が常にランク落ちしていることに対応する。つまりうまく半正定値計画問題を変数変換すれば、全ての実行可能解がブロック対角行列であり、一部の対角に零行列を持つ構造となる。これを利用することで双対問題を、つまり元の最適化問題を簡約することができる。このことを用いて、上記で挙げたサーボシステムに対する状態フィードバック制御に対して、閉形式で最小値を記述した。また、SISO である一般化制御プラントの H 出力フィードバック制御の最適値を固有値計算だけで計算する手法を提案した。興味深いのは、不変零点に関する議論は 30 年前くらい前に出揃っていたが、対応するベクトル(固有ベクトルのようなもの)についてはあまりなく、また不変零点が伝達関数の零点だけでなく、不可制御や不可観測のモードも含むため、この議論に必要な技術が開発されていなかった。そこで、一般化固有値問題の議論をベースに、SISO である一般化制御プラントの H 出力フィードバック制御の結果を論文にまとめている。

この結果の系として、感度関数や相補感度関数に関する結果が得られるが、これらの場合は、さらに双対問題の解を不変零点とそれに関連するベクトルを用いて陽に記述できる。双対問題の解を利用した感度関

数や相補感度関数ということで論文としてまとめている段階である。

(3) (1)で扱った悪条件な最適化問題は誤差に弱いことが数値実験からわかった。これを面的縮小法の観点、特に極小錐やランク条件から、どのような性質を有すると誤差に対して頑健か条件を見出した。興味深いのは、この研究では、元の問題が悪条件性を持たず、双対問題が悪条件性を持つ一般的な場合を扱うことに成功した点と、摂動により極小錐が変化することよりも、係数行列が変化することが、最適値に大きな影響を与えることがわかった点である。現在論文にまとめて投稿中である。この研究は、制御理論から派生した H 制御で生じる半正定値計画問題が基本となっており、最適化理論の応用の一つである制御理論を検討・議論することで、最適化理論への貢献もできたという点で、望外の研究成果であった。

(4) 統計・機械学習で現れる変数選択あるいは特徴選択の一つとして、赤池情報量基準を用いた方法が考えられる。これは等価に混合整数非線形計画問題として定式化できる。しかしながら、このような最適化問題を統一的に扱う汎用的なソフトウェアは公開されていない。そこで、博士課程の木村氏と、この混合整数非線形計画問題に対する分枝限定法を提案し、ソフトウェアとして実装した。この中でデータ行列が悪条件性を有している場合は、より効率よく計算できることを明らかにし、数値実験からもそれを確認した。論文としてまとめ線形回帰に対する AIC 最小化に関する論文は、Optimization Methods and Software に採択された。また、本研究の分枝限定法がより一般的な、最適化を利用した変数選択にも適用可能であることがわかったので、論文としてまとめ、投稿している。

## 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計4件)

1. Keiji Kimura and Hayato Waki, Minimization of Akaike's Information Criterion in Linear Regression Analysis via Mixed Integer Nonlinear Program, 査読有り, to appear in Optimization Methods and Software.
2. Keiji Kimura and Hayato Waki, Mixed integer nonlinear program for minimization of Akaike's information criterion, Mathematical Software - ICMS 2016, 査読有り, 292 - 300, 2016,

DOI:10.1007/978-3-319-42432-3\_26

3. Masakazu Muramatsu, Hayato Waki and Levent Tuncel, Perturbed sums-of-squares theorem for polynomial optimization and its application, Optimization Methods and Software, 査読あり, 31, 2016, 134-156, DOI:10556788.2015.1052969
4. Hayato Waki and Noboru Sebe, Application of Facial Reduction to H\_infty state Feedback Control Problem, Proceedings of the 8<sup>th</sup> IFAC Robust Control Design (ROCOND 2015), 査読有り, 48, 2015, 113 - 119, DOI:10.1016/j.ifacol.2015.09.443

〔学会発表〕(計 19 件)

1. 脇 隼人, 整数計画法と最短ベクトル問題への応用, CREST 暗号数理チュートリアル講演, 2016 年 12 月 22 日, 九州大学伊都キャンパス (福岡県・福岡市)
2. 脇 隼人, 「H ノルムに基づく出力フィードバック制御問題」, 最適化モデリングセミナー, 2016 年 9 月 20 日, 東京大学 (東京都・文京区)
3. 脇 隼人, H 制御に対する面的縮小法の適用, 京都大学数理解析研究所 研究集会「最適化技法の最先端と今後の展開」, 2016 年 8 月 25 日, 京都大学 (京都府・京都市)
4. 脇 隼人, Slater 条件から見た半正定値計画問題, 京都大学数理解析研究所 共同研究「組合せ最適化セミナー」, 2016 年 7 月 27 日, 京都大学 (京都府・京都市)
5. Hayato Waki, An Introduction on Semidefinite Program -- from the viewpoint of computation --, Combinatorial Optimization at Work, 2015 年 10 月 8 日, Berlin (Germany)
6. Hayato Waki and Noboru Sebe, Application of Facial Reduction to H\_infty state Feedback Control Problem, 22<sup>nd</sup> International Symposium on Optimization, 2015 年 7 月 14 日, Pittsburgh (USA)
7. Hayato Waki and Noboru Sebe, Application of Facial Reduction to H\_infty state Feedback Control Problem, 8<sup>th</sup> IFAC Symposium on Robust

Control Design, 2015 年 7 月 9 日, Bratislava (Slovakia)

8. 脇 隼人, H 制御問題に対する面的縮小法の適用, 研究集会「最適化: モデリングとアルゴリズム」, 2015 年 3 月 20 日, 統計数理研究所 (東京都・立川市)
9. 脇 隼人, 半正定値計画問題に対する面的縮小法, RACCOT, 2014 年 12 月 27 日, 九州工業大学サテライト福岡天神 (福岡県・福岡市)
10. 脇 隼人, 面的縮小法を用いた最適化問題の解析と計算, 自然言語処理と最適化, 2014 年 10 月 2 日, 九州大学伊都キャンパス (福岡県・福岡市)

他 9 件

〔図書〕(計 1 件)

1. Katsuki Fujisawa, Yuji Shinano and Hayato Waki, Springer Japan, Optimization in the Real World, 2016, XII, 194.

〔産業財産権〕

出願状況 (計 0 件)  
取得状況 (計 0 件)

6. 研究組織

(1) 研究代表者

脇 隼人 (WAKI, Hayato)

九州大学・マス・フォア・インダストリ  
研究所・准教授

研究者番号: 00567597