

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 29 年 6 月 26 日現在

機関番号：17102

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2014～2016

課題番号：26400204

研究課題名(和文) 疑似安定過程モデルによる新たな確率過程推測論の基盤構築とその実装

研究課題名(英文) New statistical inference for locally stable model and its implementation

研究代表者

増田 弘毅 (Masuda, Hiroki)

九州大学・数理学研究院・教授

研究者番号：10380669

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,600,000円

研究成果の概要(和文)：疑似安定型確率微分方程式の統計推測について従来の正規型疑似尤度を理論的に凌駕する新たな疑似最尤推定方を構築し、その漸近挙動を導出した。拡散過程の場合と本質的に異なる現象を明らかにし、特にエルゴード性に左右されず信頼集合を統一的に構成する方法を示した。本結果により、非正規型確率微分方程式の推測理論の視野が、延いては高頻度従属データ解析の理論基盤の視野が広がった。

研究成果の概要(英文)：We have mainly developed a novel quasi-likelihood for estimating stochastic differential equations driven by a locally stable Levy process. The proposed quasi-likelihood theoretically outstrips the conventional Gaussian quasi-likelihood. We have deduced the asymptotic mixed normality of the associated estimator, which does not require any stability condition, such as finite moments and ergodicity, allowing us to construct confidence regions in a unified manner. The results broaden perspective of quasi-likelihood construction based on small-time distributional approximation, hence of theoretical basis for high-frequency dependent data analysis.

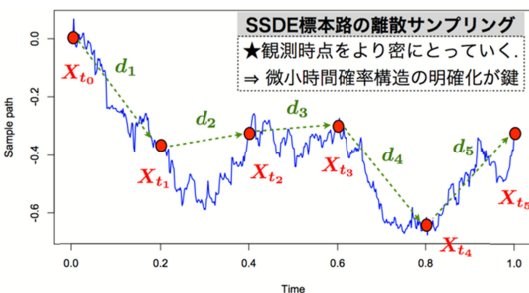
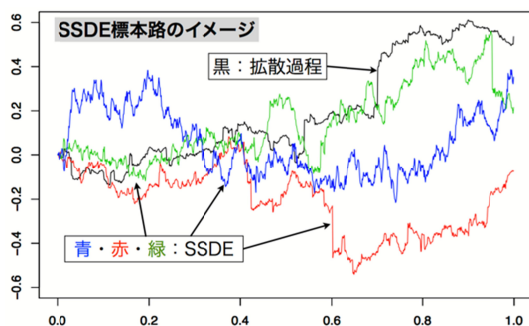
研究分野：数理統計学，確率過程論

キーワード：統計的漸近推測 疑似安定過程 確率微分方程式

### 1. 研究開始当初の背景

情報処理技術が絶え間なく発展している現代は大規模高頻度従属データ氾濫過渡期である。近年、連続時間ランダムウォークである Lévy 過程で駆動される Lévy 確率微分方程式 (Lévy SDE) は、時間発展に伴って自己従属的に確率変動する様々な自然・社会現象を分析する基礎的な統計モデルとして注目を集めている。特に分布の裾の厚さや非対称性などのデータの非正規性の表現力に富み、制御工学、システム同定、数理生物学、金融工学、電波物理学、信号処理、行動生態学など数多の応用分野でその重要性・有用性が認識されて久しい。その一方で、対応する統計解析ツールは世界的視野で見ても未だ発展途上にあるのが現状である。従来の慣例的な推定手法の誤用など、当該モデルの不適切な扱いから派生する誤った定量的予測や意思決定を避けるためには、基礎理論の整備が急務である。

非正規型 Lévy SDE の推定問題に際し、疑似安定型 Lévy 過程で駆動される SDE (SSDE) による高頻度データモデルは、微小時間遷移確率構造にある種の近似的統一性があり、単なる大標本理論の構築へつなげるのみならず、複雑な確率機構を扱い易い形式で近似可能とする大きな利点を秘めている。実際、多くの SSDE は拡散過程モデルをも近似的に表現できるため、近年の情報処理技術を通じて扱いが容易になりつつある高頻度データの枠組みで、汎用性の高い推定方式を理論的根拠とともに堅固に発展させることが期待できる。



### 2. 研究の目的

本研究を通じて、従来の標準手法であった正規型疑似有度による推定法を理論的に凌駕する新しいパラダイム確立へ貢献する。これにより、より現実的な予測結果・モデル評価結果を導く実データ解析手法創成による多大な学術的意義のみならず、産業界など社会への貢献意義まで見込まれる。

本研究の当初の研究目的は、SSDE の統計解析を主対象とした以下の項目であった。

- (1) SSDE のセミパラメトリック推測  
Masuda (2013, Ann.Stat.)において、長期観測期間の(エルゴード的)場合には、局所平均・分散の構造のみに基づく正規型疑似最尤推定量(GQMLE)が多大な情報損失量へつながり得ることが定量的に解明された。本研究では、GQMLE の漸近効率を真に優越する漸近混合正規性を有する推定方式の理論を構築する。また、当該確率場の裾確率評価を示し、予測問題への対処を見据えたより強固な収束モードへの改良も考察する。さらに、パラメトリック係数関数が誤特定されている場合の同推定量の漸近挙動の解明も試みる。
- (2) SSDE 尤度比確率場の局所的性質の解明  
(1)と同様に SSDE から高頻度データを対象として、統計的漸近決定論の立場から、尤度比確率場の局所漸近正規性(LAN)および局所漸近混合正規性(LAMN)の導出を目指す。これは安定型疑似尤度関数に係る推定・検定の漸近有効性の定義を導くため、当該モデルに関する漸近推測・データ解析の理論的基礎を与える。本内容は Alexey Kulik 氏( Institute of Mathematics of Ukrainian National Academy of Sciences )との共同研究である。
- (3) 正規型疑似最尤推定法の改良と拡張  
一般の多変量 Lévy SDE の枠組みで、係数関数のみならず、Lévy 測度に含まれるパラメータの推定をも可能とする推定方式を開発し、漸近正規性および信頼領域の構成法を導出する。
- (4) Lévy SDE のオンライン推定  
Lévy SDE から得られる高頻度データに基づき、時々刻々と新たなデータが流入してくる状況において、逐次的に推定値を補正していくオンライン推測方式を考案し、その理論的性質を調べる。

### 3. 研究の方法

統計的漸近推測理論、確率過程論、確率解析を融合的に用いた研究を行う。以下、「2. 研究の目的」に記載した項目(1)~(4)に沿って述べていく。

(1) SSDE のセミパラメトリック推測

SSDE からの高頻度データに基づいた局所(微小時間)安定近似による推定法を構築し,そのために要する理論的条件を精査する.

係数や駆動 Lévy 特性量の時刻依存性や外生変数への依存も許容した柔軟性の高い SSDE の族を提案し,時間非斉次モデルまで包含することを試みる.その上で,微小時間安定近似を介して,当該モデルの係数推定における安定疑似最尤推定量(SQMLE)の漸近混合正規性を示す.更に,安定型中心極限定理(Jacod, 1996, Lecture Notes in Math.)の確保で保証されるランダムな規格化(Student 化)を介した信頼領域の統一的な構成法を示す.

上記において特に外生変数が介在する場合には,自然と変数選択・モデル評価の問題が浮き彫りとなる.この点に関して,例えば赤池情報量規準のような予測精度の観点からの最適モデル評価規準の理論構築も併せて詰めていく.一般的に推定量をプラグインした統計量の期待値の漸近挙動の解明が要されるが,これは統計的確率場の裾での一様確率評価(大偏差不等式)の導出を通じての解決を目指す.

係数関数が想定したパラメトリックモデルから外れた場合における SQMLE の漸近挙動を解明し,想定したモデル族の中での最適パラメータの推定方式を定式化する.

(2) SSDE 尤度比確率場の局所的性質の解明

まずは疑似安定 Lévy 過程を仔細に調べ,その結果を軸に,より一般の SSDE における LAN および LAMN を係数の観点から統一的に導出することを目指す.尤度関数の存在・導関数評価などの解析のため,Poisson 空間上の Malliavin 解析を応用して,スコア関数と観測情報量の解析的表現およびモーメント評価を証明する.共同研究者の Alexey Kulik 氏は Poisson 空間上の確率解析の専門家であり,当該問題の統計解析的側面と確率解析的側面の双方から,両者の知識を活用した相乗促進効果が期待できる.

(3) 正規型疑似最尤推定法の改良と拡張

正規型疑似尤度の解析におけるサンプリング頻度の条件の緩和と,Lévy 測度に入るスケール以外のパラメータまで併せた推定法式の構築を目指す.係数の多段階推定法式の考案,条件付き期待値の高次の伊藤-Taylor 展開を利用した近似マルチンゲール関数族の構成などを行っていく.

(4) Lévy SDE のオンライン推定

ここでは従来のバッチ処理を通じた高次元パラメータの最適化を放棄し,オンライン・データに適合した推定量の構成およびその漸近挙動の解明を試みる.特に,データの高頻度性を加味した確率近似アルゴリズム(e.g. Kushner and Yin, 2003, Springer)に基づいた推定量更新方式の構築を目指す.SSDE に対する疑似尤度の逐次的な補正アルゴリズムが得るだけでなく,計算負荷が大きい疑似安定型統計的確率場の最適化の回避を通じた計算負荷削減も目指す.

4. 研究成果

「2. 研究の目的」で述べた項目(1)~(4)に関する研究成果について,大枠は以下の通りである.(1)は現在投稿中,(2)は歪みを許す一般的な疑似安定 Lévy 過程に関する結果を出版済み,そして(3)は当初の計画を改良する水準で出版済みである.他方(4)については本研究期間で成果を出すには至れなかったが,期間中に得られた理論的知見はその礎となっており,今後の研究として続けていきたい.

以下,項目毎に述べていく.以下の丸付き数字は「5. 主な発表論文等」の雑誌論文の番号に対応している.

(1) SSDE のセミパラメトリック推測

SQMLE の漸近分布論の基礎構築を行った.特に疑似コーシーの場合は疑似尤度が明示的に書けるという大きな利点がある.研究期間全般にわたって駆動 Lévy 測度や係数関数の条件緩和を考察した結果,疑似安定性の条件を Lévy 測度および(一部)Lévy-Khintchine の表現の観点から検証容易な形で明示的に与えることができた.特に提案手法では,拡散過程の場合には理論上不可能なトレンド係数の一致推定も可能である.その結果,研究期間当初に想定したよりも大分,提案手法の適用対象範囲が大きく広がった.今後,本結果の非正規性の強い時間変動高頻度データ解析への適用が期待される.本研究成果は現在投稿中である.

また,尺度係数関数が定数,かつ疑似安定指数が未知の場合に, $\sqrt{n}$ -収束率を持つ推定量(構成法は知られている)をプラグインした場合の誤差評価を通じ,トレンド項の SQMLE の漸近分布(尺度混合正規分布)が影響を受けないための十分条件を与えた.

(2) SSDE 尤度比確率場の局所的性質の解明

SSDE の特殊な場合である疑似安定 Lévy 過程モデルの場合に局所漸近正規性を導出し,系として特に(1)で筆者が提案している SQMLE の漸近有効性が得られた(論文 ).本結果の証明では,

尤度関数の解析評価において Pisson 空間上の特殊な Malliavin 解析(部分積分の公式)を用いたため,確率解析の数理統計への応用についても新たな知見を与えた.特に駆動 Lévy 測度が非対称な場合まで包含する形で局所漸近正規性を導出した.一般の SSDE のかなり特殊な場合ではあるが,本結果は,歪みを許す一般の疑似安定 Lévy 過程モデルの係数同時推定の漸近最適性に関する唯一の既存の結果と思われる.

### (3) 正規型疑似最尤推定法の改良と拡張

歪みも許す一般の Lévy 過程で駆動されるエルゴード型 Lévy SDE の係数パラメータ,および Lévy 測度の汎関数パラメータの二段階正規型疑似最尤推定量の漸近分布を導出し,近似信頼領域の構成を行った(論文).本結果は,二段階性によるパラメータの次元削減を通じての推定精度安定化へつながるだけでなく,無限次元パラメータである Lévy 測度のモデル誤特定に対する頑健性も有する.数値実験を通じて提案手法の妥当性も観察できた.

さらに論文においては,パラメトリゼーションを上げた同モデルに対してスケール・トレンド両係数の段階推定法を考案し,推定量の漸近分布を導出した.漸近分散は一般に同時推定の場合と異なることを示し,その一致推定量も容易に構成可能であるため,モデルの複雑さに反して非常に実用性が高いと言える.数値実験により提案推定法の妥当性を観察した.推定対象のモデル構造を分離できるため,本結果によって例えば二段階凸最適化モデリングを通じた数値計算面での利点も保証される.また,同時探索を必要としない段階的モデル相対評価も可能となるであろう.さらに先行結果と併せることで,Lévy 測度の汎関数推定まで包含する多段階推定方式も行えるようになった.

その他にも,当初の計画にはなかったが,本研究期間中にまとめて出版に至れた関連内容として特に下記二点を挙げておく.

論文において,一般の局所漸近二次構造を持つ疑似尤度モデルに対する Schwartz 型情報量基準を導出した.特にエルゴード的拡散過程に対して新たな相対モデル評価基準を提案し,そのモデル選択一致性を示した.本結果の SSDE モデル族への適用は今後の重要な研究課題である.

論文において,正規化疑似尤度に対応して確率場の一様裾評価を導出した.本結果により,正規型疑似尤度や安定型疑似尤度に対応する推定量の正規化版の理論的取り扱い

が統一化される.特に,予測や情報量規準を含む様々な統計的半関数の期待値評価の理論基盤が固まったと言える.SSDE モデルへの適用は今後の課題である.

### 5. 主な発表論文等

(研究代表者,研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 6 件)

Masuda, H. and Shimizu, Y. (2017+), Moment convergence in regularized estimation under multiple and mixed-rates asymptotics. *Mathematical Methods of Statistics*, 採択済み. 査読あり

Eguchi, S. and Masuda, H. (2017+), Schwarz type model comparison for LAQ models. *Bernoulli*, 採択済み. 査読あり

上原悠楨, 増田弘毅 (2017+), Lévy 駆動型確率微分方程式の段階的推定について. *統計数理*, 採択済み. 査読あり

Masuda, H. and Uehara, Y. (2017), Two-step estimation of ergodic Lévy driven SDE. *Statistical Inference for Stochastic Processes*, 20, 105-137. [doi: 10.1007/s11203-016-9133-5] 査読あり

Ivanenko, D. and Kulik, A.M. and Masuda, H. (2015), Uniform LAN property of locally stable Lévy process observed at high frequency. *ALEA - Latin American Journal of Probability and Mathematical Statistics*, 12, pp.835-862. [論文: <http://alea.impa.br/articles/v12/12-32.pdf>] 査読あり

増田弘毅 (2014), 非正規ノイズ型エルゴード過程の推定. *日本統計学会誌と文誌*. 44, pp.471-495. 査読あり [doi: 10.11329/jjssj.44.471]

[学会発表](計 16 件)

国際・国内での国際会議や研究集会など,招待講演のみを記す.

Stepwise estimation and assessment of Lévy driven SDE (December 10, 2016; CMSStatistics 2016, Seville, Spain)  
On regularized estimation of ergodic diffusion process (September 8, 2016; Advances in Statistics of Random Processes, Workshop in honor of Yury Kutoyants' 70th birthday, Le Mans)  
確率微分方程式と統計的モデル評価 (2016年8月10日; RIMS 共同研究「統計的モデリングと予測理論のための統合的数理研究」)  
On Asymptotics of multivariate

non-Gaussian quasi-likelihood (July 13, 2016; World Congress in Probability and Statistics, The Fields Institute, Toronto)  
On Asymptotics of multivariate non-Gaussian quasi-likelihood (June 28, 2016; The 4th Institute of Mathematical Statistics Asia Pacific Rim Meeting, The Chinese University of Hong Kong, China)  
Lévy 駆動型回帰モデル (2016年3月5日; 統計学会春季大会, 東北大学)  
Stepwise estimation of ergodic Lévy driven SDE (February 15, 2016; ASC2016, Asymptotic Statistics and Computations, University of Tokyo)  
Computational aspects of estimating Lévy driven models (December 19, 2015; the 9th IASC-ARS conference, Stephen Riady Centre in University Town of National University of Singapore)  
On approximate self-normalized residuals in heteroskedastic model (2015年12月8日; 統計数理研究所リスク解析戦略研究センター 第4回金融シンポジウム「ファイナンスリスクのモデリングと制御 III」, 学術総合センタービル, 東京)  
Locally Cauchy SDE model with high-frequency data (2015年9月27日; Workshop ``大規模統計モデリングと計算統計 II'', University of Tokyo)  
Quasi likelihood and Schwarz-type model assessment (2015年9月7日; 統計関連学会連合大会, 岡山大)  
Approximate Bayesian model comparison of LAQ models (July 30, 2015; 60th World Statistical Congress -- ISI2015, Riocentro, Rio de Janeiro)  
On variants of stable quasi-likelihood for Lévy driven SDE (March 19, 2015; Workshop: Statistique Asymptotique des Processus Stochastiques X, University of Maine, Le Mans)  
Quasi-Bayesian model comparison for LAQ model (2015年2月6日; 研究集会 ``大規模統計モデリングと計算統計'' 東大)  
ジャンプ過程と非正規型疑似尤度 (2014年9月15日; 統計関連学会連合大会, 東大)  
On sampling problem for pure-jump SDE. (July 2, 2014; 3rd Asia Pacific Rim Meeting (APRM), Taipei)

〔図書〕(計 1 件)

Masuda, H. (2015), Parametric

estimation of Lévy processes. In Lévy matters IV, volume 2128 of Lecture Notes in Mathematics, pp.179-286. Springer, Berlin. [doi: 10.1007/978-3-319-12373-8\_3]

〔産業財産権〕

出願状況 (計 0 件)

名称 :  
発明者 :  
権利者 :  
種類 :  
番号 :  
出願年月日 :  
国内外の別 :

取得状況 (計 0 件)

名称 :  
発明者 :  
権利者 :  
種類 :  
番号 :  
取得年月日 :  
国内外の別 :

〔その他〕

ホームページ等

(1) 個人ホームページ

<http://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~hiroki/hmhp.html>

(2) 九州大学研究者情報

<http://hyoka.ofc.kyushu-u.ac.jp/search/details/K002496/>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

増田弘毅 (MASUDA, Hiroki)  
九州大学・数理学研究院・教授  
研究者番号 : 10380669

(2) 研究分担者

( )  
研究者番号 :

(3) 連携研究者

( )  
研究者番号 :

(4) 研究協力者

( )