

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 29 年 6 月 16 日現在

機関番号：24302

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2014～2016

課題番号：26400208

研究課題名(和文)可積分系を起源とする行列の相似変形に関する新展開

研究課題名(英文) New developments of matrix similarity transformations derived from integrable systems

研究代表者

岩崎 雅史 (Iwasaki, Masashi)

京都府立大学・生命環境科学研究科・准教授

研究者番号：30397575

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,600,000円

研究成果の概要(和文)：1つ目の研究成果は特異値分解アルゴリズムI-SVDの高精度化である。具体的には、特異値を求めるためにdLVsアルゴリズムを、特異ベクトルを求めるために分割型ツイスト分解法を新たに考案した。2つ目の研究成果は帯行列の固有値に収束するような力学系を導いたことである。離散ハングリー可積分系については解表現とその漸近挙動を徹底的に調べた。新たに5重対角行列の固有値が求められるアルゴリズムも定式化した。3つ目の研究成果は離散ハングリー可積分系と拡張型フィボナッチ数列および多項式の根を関連付け、逆固有値問題に対する解法まで発展させたことである。また、min-plus代数において新しい固有多項式を提案した。

研究成果の概要(英文)：One of the results is to improve the I-SVD algorithm for computing singular value decompositions of bidiagonal matrices with higher accuracy. The new I-SVD algorithm employs the proposed dLVs algorithm for singular values and the proposed divided Twisted factorization method for singular vectors. The second is to investigate the convergence of solutions to dynamical systems to eigenvalues of various band matrices. Solution expressions of the discrete hungry integrable systems and their asymptotic convergence are thoroughly clarified. A new algorithm for computing eigenvalues of pentadiagonal matrices is also designed. The third is to find relationships among the discrete hungry integrable systems, extended Fibonacci sequences and roots of polynomials, and then develop them in constructing band matrices with prescribed eigenvalues. New characteristic polynomials of matrices are also presented over min-plus algebra.

研究分野：行列の固有値問題および逆固有値問題、離散可積分系

 キーワード：行列の相似変形 dLVsアルゴリズム 分割型ツイスト分解法 離散ハングリー可積分系 行列の帯構造
 フィボナッチ数列 逆固有値問題 min-plus固有多項式

1. 研究開始当初の背景

上2重対角行列の特異値分解が高速に求められる I-SVD (Integrable-Singular Value Decomposition) アルゴリズムは、LV (Lotka-Volterra) 系の時間変数が離散化された可積分系である dLV (discrete LV) 系から誕生した純国産アルゴリズムである。具体的には、mdLVs (modified dLV with shift) アルゴリズムを用いて上2重対角行列の特異値が、dLV 型ツイスト分解法を用いて上2重対角行列の特異ベクトルが求められる。mdLVs アルゴリズムは dLV 系から導かれる dLV アルゴリズムに対して原点シフトを導入した高速版アルゴリズムである。mdLVs アルゴリズムは文字通り dLV 系に修正を加えた上で原点シフトを導入したアルゴリズムであり、dLV アルゴリズムに対して直接的な原点シフトには成功していない。また、dLV 型ツイスト分解法では上2重対角行列が近接特異値をもつ場合は高精度に特異ベクトルを求めるのは難しい。

もともと LV 系は生物種ごとに 1, 2, ... と番号を振り、生物種 1 が生物種 2、生物種 2 が生物種 3、... を捕食する状況を記述した時間変数が連続な力学系である。M. Chu の研究成果によると、連続な LV 系は上2重対角行列の特異値分解に係わる相似変形と関連付けられる。LV 系を拡張した可積分系として、捕食できる生物種を複数にした hLV (hungry LV) 系がある。研究代表者らのこれまでの研究において、hLV 系の離散時間版である dhLV (discrete hLV) 系が全非負行列の相似変形と関連付けられ、全非負行列(すべての小行列式が非負である行列)の固有値を求めるための dhLV アルゴリズムが定式化された。hLV 系はハングリー可積分系の 1 つであるが、hLV 系以外のハングリー可積分系とそれらの離散時間版が全非負行列の相似変形と関連付けられた研究は断片的である。また、3重対角行列以外の帯行列に対する相似変形については、可積分系のみならず力学系の視点から捉えられた研究は皆無である。

研究代表者らのこれまでの研究では、dLV 系と有名なフィボナッチ数列の結び付きを明らかにした。フィボナッチ数列が多項式の根と対応付けられた研究はあるが、dLV 系が多項式の根と直接的に関連付けられてはいない。また、dLV 系の拡張版である dhLV 系とフィボナッチ数列の結び付きについては調べられていない。もちろん、dhLV 系と多項式の根の結び付きについても未解明である。

2. 研究の目的

研究の目的は次の 3 種類に分類される。

I-SVD アルゴリズムの改良：

I-SVD アルゴリズムでは、高速化のために原点シフトが組み込まれた mdLVs アルゴリズムを用いて上2重対角行列の特異値が求められるが、dLV アルゴリズムを修正することな

く直接的に原点シフトを組み込んだ新しいアルゴリズムを定式化する。

また、どのような上2重対角行列の特異ベクトルでも dLV 型ツイスト分解法を用いて精度よく求まるような工夫を考案する。

帯行列の相似変形を与える力学系の導出と固有値計算アルゴリズムの定式化：

離散ハングリー可積分系に係わる全非負行列の相似変形および固有値計算アルゴリズムについて徹底的に整理する。

また、全非負行列に限定しない帯行列の相似変形に係わる力学系を導き、その離散化を通じて帯行列の固有値計算アルゴリズムを定式化する。

離散ハングリー可積分系が結び付くフィボナッチ数列と多項式の解明：

離散ハングリー可積分系とフィボナッチ数列の結び付きを明らかにする。

また、離散ハングリー可積分系(dLV 系を含む)を多項式の根と関連付ける。

3. 研究の方法

研究の方法は次の 3 種類に分類される。

I-SVD アルゴリズムの改良：

dLV アルゴリズムを LR 変換の視点から再考することで、mdLVs アルゴリズムとは異なる dLV アルゴリズムに直接的に原点シフトを導入したアルゴリズムを定式化する。dLV アルゴリズムには任意パラメータが含まれるが、この任意パラメータに原点シフトの役割を担わせるようにアルゴリズムを設計する。

dLV 型ツイスト分解法の実行直前に cyclic reduction を施すことを検討する。もともと cyclic reduction は連立 1 次方程式の係数行列を変形する方法であるが、上2重対角行列の特異ベクトル計算を複数の小問題に分割できる。cyclic reduction を用いることで不具合が生じないか調べることから始める。

帯行列の相似変形を与える力学系の導出と固有値計算アルゴリズムの定式化：

離散ハングリー可積分系の解表現とその漸近展開について徹底的に調べ、離散ハングリー可積分系に基づくアルゴリズムに係わる理論を確立する。

また、3重対角行列の相似変形に関する M. Chu の発想を拡張させて帯行列の相似変形に係わる力学系を導き、得られた力学系をうまく離散化することで帯行列の固有値計算アルゴリズムを定式化する。

離散ハングリー可積分系が結び付くフィボナッチ数列と多項式の解明：

dLV 系とフィボナッチ数列の結び付きを参考にして、離散ハングリー可積分系に内在するフィボナッチ数列を見出す。ここで、フィボナッチ数列は有名なフィボナッチ数列に

限定せず、柔軟に拡張させたフィボナッチ数列を考える。

また、数列の視点から離散ハングリー可積分系と多項式の根を捉え、数列を介して離散ハングリー可積分系と多項式の根を関連付ける。

4. 研究成果

発表論文 8 件、投稿中および投稿準備中論文 9 件であり、計画段階の予想を上回る研究成果が得られた。研究成果の内容については次の 3 種類に分類される。

1-SVD アルゴリズムの改良：

dLV アルゴリズムの収束を加速させるために原点シフトを導入した dLV with shift (dLVs) アルゴリズムを定式化した。dLVs アルゴリズムは mdLVs アルゴリズムと異なり dLV アルゴリズムに対して直接的な原点シフト導入に成功したアルゴリズムである。dLVs アルゴリズムにおける原点シフト導入は自然であるため、mdLVs アルゴリズムと比べると dLVs アルゴリズムは演算量が減少した。

cyclic reduction を繰り返すたびに 3 重対角行列の条件数は低下することを証明した。対象がブロック 3 重対角行列の場合でも同様の条件数低下が発生することも明らかにした。これは、前処理で cyclic reduction を施しても特異ベクトル計算は難化しないことを意味する。cyclic reduction を用いて特異ベクトル計算を複数の小問題に分割し、個々の小問題に対してツイスト分解法を適用するアルゴリズムを定式化した。従来のツイスト分解法よりも精度よく特異ベクトルが求まることを数値実験で確認した。

帯行列の相似変形を与える力学系の導出と固有値計算アルゴリズムの定式化：

任意の整数 n に対して対称 $(2n+1)$ 重対角行列の相似変形を与える力学系についても明らかにした。得られた力学系に対する離散化から対称 5 重対角行列の固有値を求めるためのアルゴリズムの定式化にも成功した。この研究成果については日本応用数学会 2015 年度年会において最優秀ポスター賞を受賞するなど高く評価された。

また、全非負行列の相似変形に係わる離散ハングリー可積分系の解表現とその漸近挙動について網羅的に調べた。任意パラメータを含む非自励な離散ハングリー可積分系からは全非負行列の固有値を求めるための原点シフト付きアルゴリズムが導かれるが、このアルゴリズムの収束次数は実用レベルの弱 2 次であることも示した。さらに、離散ハングリー可積分系に基づくアルゴリズムは例えば M -行列(すべての非対角成分が負かつすべての首座小行列式が正である行列)のような固有値も求められることも明らかにした。

離散ハングリー可積分系が結び付くフィボナッチ数列と多項式の解明：

dhLV 系の解表現から dhLV 系が潜在的に拡張型フィボナッチ数列を保つような数理論造をもつことを見出した。この研究成果は日本応用数学会 2014 年度年会において優秀ポスター賞を受賞するなど高く評価された。

また、数列の視点から離散ハングリー可積分系を捉え、離散ハングリー可積分系と多項式の根を結び付けることに成功した。この研究成果を応用して行列の逆固有値問題を解くためのアルゴリズムの定式化まで発展させた。多項式を行列の固有多項式と見なすことで多項式の根は行列の固有値と対応付けられるため、離散ハングリー可積分系を活用すれば望みの固有値をもつ行列が作成できるという研究成果である。

さらに、線形代数に留まらず、Min-Plus 代数における新しい固有多項式の定義など、予想以上の研究成果が得られた。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 8 件)

[Refereed] Akihiko Tobita, Akiko Fukuda, Emiko Ishiwata, Masashi Iwasaki and Yoshimasa Nakamura, Monotonic convergence to eigenvalues of totally nonnegative matrices in an integrable variant of the discrete Lotka-Volterra system, *Lecture Notes in Computational Science and Engineering*, to appear

[Refereed] Kanae Akaiwa, Yoshimasa Nakamura, Masashi Iwasaki, Akira Yoshida and Koichi Kondo, An arbitrary band structure construction of totally nonnegative matrices with prescribed eigenvalues, *Numerical Algorithms*, to appear, doi: 10.1007/s11075-016-0231-7

[Refereed] Masato Shinjo, Kanae Akaiwa, Masashi Iwasaki and Yoshimasa Nakamura, An extended Fibonacci sequence associated with the discrete hungry Lotka-Volterra system, *International Journal of Biomathematics*, 10 (2017), 1750043(16pp), doi:10.1142/S1793524517500437

[Refereed] Munehiro Nagata, Masatsugu Hada, Masashi Iwasaki and Yoshimasa Nakamura, Eigenvalue clustering of coefficient matrices in the iterative stride reductions for linear systems, *Computers & Mathematics with Applications*, 71 (2016), 349-355, doi:10.1016/j.camwa.2015.11.022

[Refereed] Kanae Akaiwa, Yoshimasa Nakamura, Masashi Iwasaki, Hisayoshi Tsutsumi and Koichi Kondo, A finite-step construction of totally nonnegative matrices with specified eigenvalues, *Numerical Algorithms*, **70** (2015), 469-484, doi:10.1007/s11075-015-9957-x

[Refereed] Ryo Sumikura, Akiko Fukuda, Emiko Ishiwata, Yusaku Yamamoto, Masashi Iwasaki and Yoshimasa Nakamura, Eigenvalue computation of totally nonnegative upper Hessenberg matrices based on a variant of the discrete hungry Toda equation, *AIP Conference Proceedings*, **1648** (2015), 690006 (4pp), doi:10.1063/1.4912921

[Refereed] Sonomi Kakizaki, Akiko Fukuda, Yusaku Yamamoto, Masashi Iwasaki, Emiko Ishiwata and Yoshimasa Nakamura, Conserved quantities of the integrable discrete hungry systems, *Discrete and Continuous Dynamical Systems - Series S*, **8** (2015), 889-899, doi:10.3934/dcdss.2015.8.889

[Refereed] Masato Shinjo, Masashi Iwasaki, Akiko Fukuda, Emiko Ishiwata, Yusaku Yamamoto and Yoshimasa Nakamura, An asymptotic analysis for an integrable variant of the Lotka-Volterra prey-predator model via a determinant expansion technique, *Cogent Mathematics*, **2** (2015), 1046538(14pp), doi:10.1080/23311835.2015.1046538

[学会発表](計 15 件)

Masato Shinjo, Yoshimasa Nakamura, Masashi Iwasaki and Koichi Kondo, Non-autonomous discrete hungry integrable systems and asymptotic expansions of their determinant solutions, The 10th IMACS International Conference on Nonlinear Evolution Equations and Wave Phenomena: Computation and Theory, March 29, 2017, Athens GA (USA)

渡辺扇之介、保田愛斗、岩崎雅史、渡邊芳英、Min-Plus 代数における複数の固有値を持つ行列のグラフ構造、日本応用数理学会 2016 年度年会、2016 年 9 月 12 日、北九州国際会議場(福岡県北九州市)

渡辺扇之介、保田愛斗、岩崎雅史、渡邊芳英、フレーム法の類似物を用いた Min-Plus 代数における固有多項式の定義、第 45 回数値解析シンポジウム、2016 年 6 月 10 日、霧島ホテル(鹿児島県霧島市)

新庄雅斗、王坦、中村佳正、岩崎雅史、対称ブロック Cyclic Reduction 法における係数行列の固有値変化について、第 45 回数値解析シンポジウム、2016 年 6 月 8 日、霧島ホテル(鹿児島県霧島市)

岩崎雅史、中村佳正、dLV アルゴリズムに対する陽的な原点シフト導入について、日本応用数理学会 2016 年研究部会連合発表会、2016 年 3 月 5 日、神戸学院大学(兵庫県神戸市)

Kanae Akaiwa, Yoshimasa Nakamura, Masashi Iwasaki, Hisayoshi Tsutsumi, Akira Yoshida and Koichi Kondo, Inverse eigenvalue problems for totally nonnegative matrices in terms of discrete integrable systems, SIAM Conference on Applied Linear Algebra, October 27, 2015, Atlanta (USA)

石川貴弘、新庄雅斗、岩崎雅史、中村佳正、実対称 5 重対角行列の固有値に収束する解をもつ力学系とその離散化、日本応用数理学会 2015 年度年会、2015 年 9 月 9 日、金沢大学(石川県金沢市)

新庄雅斗、中村佳正、岩崎雅史、近藤弘一、離散戸田方程式における時間発展の拡張について、第 44 回数値解析シンポジウム、2015 年 6 月 9 日、ぶどうの丘(山梨県甲州市)

赤岩香苗、中村佳正、岩崎雅史、堤久宜、吉田晃、近藤弘一、離散可積分系に関連する TN 行列の逆固有値問題について、第 44 回数値解析シンポジウム、2015 年 6 月 9 日、ぶどうの丘(山梨県甲州市)

赤岩香苗、中村佳正、岩崎雅史、近藤弘一、Hessenberg 型でない TN 行列の逆固有値問題に対する有限ステップ解法について、日本応用数理学会 2015 年研究部会連合発表会、2015 年 3 月 6 日、明治大学(東京都中野区)

赤岩香苗、中村佳正、岩崎雅史、堤久宜、近藤弘一、TN 行列の逆固有値問題の離散ハングリー戸田方程式による有限ステップ解法について、日本応用数理学会 2014 年度年会、2014 年 9 月 5 日、政策研究大学院大学(東京都港区)

新庄雅斗、赤岩香苗、岩崎雅史、中村佳正、生物の捕食関係に内在するフィボナッチ数列について、日本応用数理学会 2014 年度年会、2014 年 9 月 3 日、政策研究大学院大学(東京都港区)

Kanae Akaiwa, Masashi Iwasaki, Koichi Kondo and Yoshimasa Nakamura, Convergence to multiple eigenvalues in the quotient-

difference algorithm, The 19th
International Linear Algebra Society
Conference, August 6, 2014, Seoul (Korea)

新庄雅斗、岩崎雅史、福田亜希子、石渡
恵美子、山本有作、中村佳正、totally
nonnegative 行列に対するシフト付き dhLV ア
ルゴリズムの収束性について、第 43 回数値
解析シンポジウム、2014 年 6 月 13 日、ホテ
ル日航八重山(沖縄県石垣市)

赤岩香苗、中村佳正、岩崎雅史、堤久宜、
近藤弘一、離散ハングリー戸田方程式を用い
た Totally Nonnegative 行列の作成法、第 43
回数値解析シンポジウム、2014 年 6 月 13 日、
ホテル日航八重山(沖縄県石垣市)

6. 研究組織

(1) 研究代表者

岩崎 雅史 (IWASAKI, Masashi)
京都府立大学・大学院生命環境科学研究科・准教授
研究者番号：30397575

(2) 研究分担者

()

研究者番号：

(3) 連携研究者

山本 有作 (YAMAMOTO, Yusaku)
電気通信大学・大学院情報理工学研究科・
教授
研究者番号：20362288

石渡 恵美子 (ISHIWATA, Emiko)
東京理科大学・理学部・教授
研究者番号：30287958

近藤 弘一 (KONDO, Koichi)
同志社大学・理工学部・教授
研究者番号：30314397

福田 亜希子 (FUKUDA, Akiko)
芝浦工業大学・システム理工学部・准教授
研究者番号：70609297

(4) 研究協力者

新庄 雅斗 (SHINJO, Masato)