

令和元年6月10日現在

機関番号：32660

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2014～2018

課題番号：26400212

研究課題名(和文) ある種の差分方程式の性質解明と数値計算の活用

研究課題名(英文) Study of the properties of some difference equations and application of computation

研究代表者

石渡 恵美子 (Ishiwata, Emiko)

東京理科大学・理学部第一部応用数学科・教授

研究者番号：30287958

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,600,000円

研究成果の概要(和文)：感染症数理モデルをより現実的に捉えるために、昨今、時間遅れの影響が考慮されている。解の正值性を保つ離散化は具体的な振る舞いを見るためにも重要であり、これらを時間遅れを含めた超離散型モデルにまで応用した。結果として、連続型・差分型・超離散型モデルで定性的性質の明らかな相関性があることを見出している。感染症数理モデルの超離散化の例は少なく、時間遅れまで言及できたことは有意義である。一方、大学院生らの協力のおかげで、数理生物モデルに由来する離散ハングリー可積分系に関して、漸近挙動等の性質や固有対の数値計算法等も導けた。関連する論文が多く掲載されている。

研究成果の学術的意義や社会的意義

昨今のウイルスの感染伝播の脅威に対し、数理モデルによる解明は重要視されている。これらの時間発展による具体的な挙動の把握に差分方程式の解明は役立つと考える。

研究成果の概要(英文)：Due to the reality of mathematical models of infections, the effects of time delays are often studied recently. Proper discretization to keep the solution positive is important to understand the behavior of such a model.

We newly tried to apply these ideas to the ultra-discrete models. As a result, clear correspondence in the qualitative property was confirmed among the continuous model, the discretized model, and the ultra-discrete model including time delay.

Moreover, through the help of graduate students, we derived results such as convergence behavior for a kind of the integrable discrete hungry systems and formulation of calculation procedure of eigenpairs. Related papers have been published.

研究分野：数値解析

キーワード：時間遅れ 差分方程式 数理生物モデル 超離散化 安定性

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19、CK - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

時間項に遅れを持つ微分方程式(定数遅れは微分差分方程式ともいわれる)は、より現実的な数理モデルとして、解の定性的理論に関する論文が非常に多く発表されている。特に、現実社会で深刻な問題になりつつあるウィルスの流行対策として、数理モデリングの研究も重要なテーマといえる。

代表者は本科学研究費補助金の1つ前の研究課題として、常微分方程式や偏微分方程式に対する安定的な数値計算スキームの発想を、定数遅れを持つ微分方程式の離散化にも応用し、解の正值性を担保する差分型感染症モデルを提案、定性的性質を調べた論文を共同研究として掲載している。この結果は、従来の連続型モデルで得られた平衡点の安定性と同等の条件を差分型モデルでも示せることを見出したものである。

同時に、ある種の離散可積分系の性質や固有値計算法に関わる共同研究も、これまで続けてきた。これらの異なる研究を続ける中で、セルオートマトンにも関連する超離散化という特有の手続きを勉強することになり、時間遅れを持つ感染症モデルにも応用できるのでは?と考えるようになった。感染症数理モデルの定性的理論に関して残された問題は非常に難解である。超離散化の活用は単純化して挙動を見られるので、未解明な問題の理解等に役立つことがあるのでは?と期待した。

本科学研究費補助金の申請時は、可積分系研究者との共同研究を積極的に進めていた頃で、新たな固有値計算法の定式化や関連する性質を次々と見出しつつあった。扱った離散可積分系には生物の被捕食関係を表す数理モデルもあり、この超離散化を見ていたことから、時間遅れを持つ問題に発想を応用できないか?と考えたのは自然なことである。

2. 研究の目的

本研究課題は、基本的な感染症モデルを幾つか取り上げ、まずは時間遅れを持つ差分型モデルから超離散型モデルを導出し、これらの漸近挙動等を調べる。これより、連続型モデル・差分型モデル・超離散型モデルでの時間遅れの影響や安定性に関わる相関性を明示することを目標とする。得られた成果は逐次、国内外で発表し、英論文や和文報告等で公開する。

超離散化の手続きを感染症モデルに適用した結果は少なく、最も基本的な感染症モデルに限定されている。ある種の感染症モデルを変形して得られるロジスティック方程式等も超離散化の適用例がないようなので、今回はこれらの時間遅れを含む問題に踏み込んで調べる。得られた解析手順を他の時間遅れを持つ数理モデルに適用していくことも継続的に検討する。本課題の遂行には、超離散化に関わる事項や感染症モデルの解の性質等の知識を深めることがとても大切なので、別に継続的に進めてきた共同研究は今後もできるだけ続ける。

3. 研究の方法

可積分系研究で重要な話題の一つである超離散化を、時間遅れを持つ感染症モデルに応用して性質を調べるため、定性的性質が知られた基本的な感染症モデルや遅延ロジスティック方程式等を取り上げた。まずは、1つ前の研究課題で見出していた解の正值性等を保つ安全な離散化手順を基本的な感染症モデルに応用し、時間遅れをもつ差分方程式を導出する。超離散化の適用にはこの手続きがとても重要になる。さらに、時間遅れの項を残した超離散型モデルを導出し、解の収束性を逐次的に調べ、安定性の条件を見出すことで、連続型モデルや差分型モデルで得られていた性質と比較する。フィードバック項を含む時間遅れを持つ感染症モデル等、差分型モデルでもまだ解明されていない問題があるので、離散化の工夫も含めて解決を図る。

今まで続けてきた離散可積分系に基づく数値計算法の導出等の共同研究には、被捕食関係を表す有名な数理生物モデルに由来する差分方程式の漸近挙動や中心多様体を用いた解析等も含まれている。これらは本研究の大きなヒントにもなり得るため、引き続き進める。

本研究課題の遂行には学生の協力も重要となる。様々なモデルへの解析手順の適用と確認、数値計算による予備実験等を進めてもらうことで検証がはかどる。

4. 研究成果

本研究費補助金では、以下の幾つかの方向の研究を進め、それぞれ成果が得られた。解決しきれずに残った問題や新たに芽が出てきた話題については、今後も解明を続ける。

(1) 時間遅れを持つ感染症モデルの超離散化の試みによる成果が得られた。時間遅れを持つ連続型数理モデルに対する解の正值性を保つ安全な離散化は、連続型モデルと差分型モデルの解の安定性条件の同等性を生むことは以前に見出していた。今回は、この発想を超離散化にまで応用し、時間遅れの項を含めた超離散方程式を導出することで、連続型・差分型・超離散型モデルに関する定性的性質の相関性を見出すことができた。これらは学会や研究集会などで発表し、幾つかの論文が掲載された(雑誌論文、)。感染症数理モデルの超離散化の例は少なく、時間遅れの影響を具体的に言及したのは初めてと思われる。今後、感染症モデルに限らず、時間遅れを持つ数理モデルに本研究の発想を応用し、遅れの影響の理解を深めたい。

超離散方程式は面白い性質を色々持っており、箱玉系と呼ばれる力学系もその1つにある。超離散化を勉強する中で、箱玉系の性質や様々な種類があることを知った。一環として、箱玉系の保存量の導出方法を見直した成果が雑誌論文である。

一方、感染症モデルに関わる成果として、研究補助の大学院生の思わぬ発見と共著者の協力により、雑誌論文が掲載されるに至った。免疫を喪失するタイプの感染症モデルの平衡点の大域安定性に関して、連続モデルのみならず、差分型モデルにおいても明示できている。

(2) 生物の個体数変動に関連し、被捕食関係を表す可積分な離散ハングリー系の独特の性質や数値計算法の応用に関して知見を深めることは本課題にも有益なので、共同研究は続けている。被捕食を表す離散可積分系に対する共同研究で、新たな固有対の計算方法や中心多様体を用いた漸近挙動等を解析した論文が掲載された(雑誌論文,)。これらの研究のおかげで、時間遅れを持つ場合への応用を見出すことができ、後継の課題に繋げることができた。異なる問題で周期的収束性を調べた成果として雑誌論文がある。

(3) 感染症に限らず、時間遅れを持つ微分方程式に関して、研究期間内に幾つか検討することができた。ロジスティック方程式のように見かけ上は簡単に見える問題も、時間遅れを持つと解は明示的に書くことができない。平衡点の安定性の議論で得られる条件に着目し、領域を可視化することで条件を見直した結果が雑誌論文として報告されている。

時間遅れを持つ問題は連続と離散的な面を持ち、解析は難解である。通常は、遅れが十分に小さいと考え、遅れの無い非線形力学系として扱われているが、時間遅れを含めて問題を見直すと、従来では予想できなかった不思議な解挙動等が現れ、解の安定性や不安定性も急変する。このことを共同研究者は爆発解に関して新たに見出した(学会発表)。数値実験等で面白い事象が確認できており、本研究課題とは異なるが共同研究を始めている。本課題の時間遅れの知見が他の研究にも役立つので、今後、時間遅れの影響に関する検証は続ける。

5. 主な発表論文等

研究期間内の成果として、論文や報告、学会発表は以下の通りである。

[雑誌論文](計 10 件)

Kei Fushimi, Yoichi Enatsu, Emiko Ishiwata, Global stability of an SIS epidemic model with delays, *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, Vol.2018, No.41, 5345-5354, 2018 (doi.org/10.1002/mma.5084). 査読有

Masaki Sekiguchi, Emiko Ishiwata, Yukihiko Nakata, Dynamics of an ultra-discrete SIR epidemic model with time delay, *Mathematical Biosciences and Engineering*, Vol.2018, No.15, 653-666, 2018 ([doi:10.3944/mbe.2018029](https://doi.org/10.3944/mbe.2018029)). 査読有

You Takahashi, Masashi Iwasaki, Akiko Fukuda, Emiko Ishiwata, Yoshimasa Nakamura, Periodic convergence in the discrete hungry Toda equation, *Journal of Physics A, Mathematical and Theoretical*, Vol.51, No.34, 344001(9p), 2018 (<https://doi.org/10.1088/1751-8121/aaccb5>). 査読有

Hiroshi Takeuchi, Kensuke Aihara, Akiko Fukuda, Emiko Ishiwata, Computation of eigenvectors for a specially structured banded matrix, *Lecture Notes in Computational Science and Engineering (LNCSE): Eigenvalue Problems: Algorithms, Software and Applications in Petascale Computing (EPASA2015)*, T. Sakurai et al. (eds.), Vol.117, 143-155, 2018 (https://doi.org/10.1007/978-3-319-62426-6_10). 査読有

Tobita Akihiko, Akiko Fukuda, Emiko Ishiwata, Masashi Iwasaki, Yoshimasa Nakamura, Monotonic convergence to eigenvalues of totally nonnegative matrices in an integrable variant of the discrete Lotka-Volterra system, *Lecture Notes in Computational Science and Engineering (LNCSE): Eigenvalue Problems: Algorithms, Software and Applications in Petascale Computing (EPASA2015)*, T. Sakurai et al. (eds.), Vol.117, 157-169, 2018 (https://doi.org/10.1007/978-3-319-62426-6_11). 査読有

Masaki Sekiguchi, Emiko Ishiwata, Yukihiko Nakata, Convergence of a logistic type ultradiscrete model, *Discrete Dynamics in Nature and Society*, Vol.2017, Article ID 7893049, 2017 ([doi:10.1155/2017/7893049](https://doi.org/10.1155/2017/7893049)). 査読有

Sonomi Kakizaki, Akiko Fukuda, Yusaku Yamamoto, Masashi Iwasaki, Emiko Ishiwata, Yoshimasa Nakamura, Conserved quantities of the integrable discrete hungry systems, *Discrete and Continuous Dynamical Systems-Series S*, Vol.8. No.5, 889-899, 2015 ([doi:10.3934/dcdss.2015.8.889](https://doi.org/10.3934/dcdss.2015.8.889)). 査読有

Masato Shinjo, Masashi Iwasaki, Akiko Fukuda, Emiko Ishiwata, Yusaku Yamamoto, Yoshimasa Nakamura, An asymptotic analysis for an integrable variant of the Lotka-Volterra prey-predator model via a determinant expansion technique, *Cogent Mathematics*, Vol.2, 106538, 2015 ([/10.1080/23311835.2015.1046538](https://doi.org/10.1080/23311835.2015.1046538)). 査読有

中田行彦, 谷津田直之, 石渡恵美子, Visualisation of stability regions for logistic difference equations with multiple delays, *京都大学数理解析研究所講究録「第11回生物数学の理論とその応用」*, 1937巻, 32-41, 2015. 査読無

関口真基, 石渡恵美子, 病理モデルにおける連続型と超離散型との対応関係, *九州大学応用力学研究所研究集会報告「非線形波動研究の現状 - 課題と展望を探る - 」*, 査読有, 26A0-S2, 127-132, 2015. 査読有

〔学会発表など〕(計14件)

石渡恵美子, 感染症の数理モデルについて, 日本医科大学・東京理科大学 第5回合同シンポジウム, 日本医科大学, 2018年12月8日

Kei Fushimi, Yoichi Enatsu, Emiko Ishiwata, Global stability of an SEIS epidemic model with delays, 第27回日本数理生物学会年会 (JSMB2017), 北海道大学, 2017年10月7日

Yoichi Enatsu, Masatoshi Kanamori, Emiko Ishiwata, Mosquito model for Wolbachia infection with hatching delays, 第27回日本数理生物学会年会 (JSMB2017), 北海道大学, 2017年10月6-7日(ポスター)

石渡哲哉, 石渡恵美子, 中田行彦, 三木勝博, タイムラグが引き起こす爆発現象について: リミットサイクル振動モデルを題材に, 日本数学会 2017年度年会応用数学分科会, 首都大学東京, 2017年3月27日

Masaki Sekiguchi, Emiko Ishiwata, Yukihiro Nakata, Effect of time delay for ultra-discretized logistic equation, The 26th annual meeting of the Japanese Society for Mathematical Biology(JSMB2016), 九州大学, 2016年9月7-8日(ポスター)

石渡恵美子, ある種の数理生物モデルにおける差分と超離散化, 研究会「応用解析研究会～可積分系から計算数学まで～」, 大阪 天満研修センター, 2016年5月19日

竹内弘史, 相原研輔, 福田亜希子, 石渡恵美子, 離散ハングリーロトカ・ボルテラ系に関連する非対称帯行列の固有対計算, 日本数学会応用数学分科会 2015年度合同研究集会, 龍谷大学, 2015年12月19日

関口真基, 石渡恵美子, 中田行彦, 超離散型ロジスティック方程式における時間遅れの影響, MIMS 共同研究集会「可積分系が拓く現象数理モデル」, 明治大学, 2015年11月6日(ポスター)

関口真基, 石渡恵美子, 時間遅れをもつ超離散型 SIS 病理モデル, MIMS 共同研究集会「可積分系が拓く現象数理モデル」, 明治大学, 2015年11月6日(ポスター)

Hiroshi Takeuchi, Kensuke Aihara, Akiko Fukuda, Emiko Ishiwata, Computation of all the eigenpairs for a particular kind of banded matrix, SIAM Conference on Applied Linear Algebra (LA15), Atlanta, USA, 2015年10月26-30日

Masaki Sekiguchi, Emiko Ishiwata, Effects of time delays in ultra-discrete epidemic models, 2015 Joint Meeting of The 5th China-Japan-Korea Colloquium on Mathematical Biology and The Japanese Society for Mathematical Biology (CJK-JSMB 2015), 同志社大学, 2015年8月26-29日

関口真基, 石渡恵美子, 病理モデルにおける連続型と超離散型との対応関係, 平成26年度九州大学応用力学研究所 共同利用研究集会「非線形波動研究の現状 - 課題と展望を探る - 」, 九州大学, 2014年10月31日(ポスター)

谷津田直之, 中田行彦, 石渡恵美子, 複数遅れを持つ離散ロジスティック方程式の安定領域の可視化, 京都大学数理解析研究所 共同利用研究集会「第11回生物数学の理論とその応用」, 京都大学, 2014年9月16日

Masaki Sekiguchi, Emiko Ishiwata, Dynamics of ultra-discrete epidemic models, The joint annual meeting of the Japanese Society for Mathematical Biology and the Society for Mathematical Biology (JSMB/SMB Osaka 2014), 大阪府立国際会議場, 2014年7月28日-8月1日

〔図書〕(計0件)

〔産業財産権〕

出願状況(計0件)

取得状況(計0件)

〔その他〕

ホームページ等

6. 研究組織

(1)研究分担者 なし

(2)研究協力者 なし

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。