

令和 2 年 5 月 31 日現在

機関番号：32683

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2014～2019

課題番号：26400257

研究課題名（和文）M理論における可積分構造の解明

研究課題名（英文）Investigating integrable structures in M-theory

研究代表者

酒井 一博（Sakai, Kazuhiro）

明治学院大学・法学部・准教授

研究者番号：10439242

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 2,500,000円

研究成果の概要（和文）：M理論の基本構成要素であるM5ブレーン上に現れる低エネルギー有効理論として基本的なE弦理論について、可積分構造を利用することで、量子論的に厳密なBPS指数を解析した。E弦理論を2次元トーラスにコンパクト化することで、階数1の4次元N=2超対称共形場理論のBPS指数を調べ、その一般的構造を明らかにした。M理論に現れる弦状物体の楕円種数を調べる上で重要となる、 E_n 型Weyl群不変なJacobi形式について、その環の生成子の完全な組を具体的に構成した。また2次元Yang-Mills理論に関連した弦理論・M理論の設定における非摂動効果を、リサージェンス理論を用いて解析した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

弦理論は現代物理学の土台をなす一般相対論と量子論を矛盾なく両立させる数少ない理論のひとつであり、素粒子の相互作用を記述するゲージ理論および重力理論を自然に包含することから、素粒子物理の統一理論の最有力候補と目されている。量子論的に矛盾のない弦理論は5種類しかなく、これらをすべて統合する究極の母体の理論としてM理論が提唱されている。弦理論やM理論は未完成の理論であり、その完成度を高めることが分野全体の大きな目標となっている。本研究では、M理論の特定の設定において現れる可積分性を利用することで、M理論に現れる励起状態のスペクトルの厳密な解析を推進し、またそれに必要となる技術的土台を整備した。

研究成果の概要（英文）：E-string theory is one of the fundamental theories arising as the low energy effective theory of an M5-brane in M-theory. By making use of integrable structures we have investigated the quantum-mechanically exact BPS index of the E-string theory. By compactifying the E-string theory on a torus we have studied the BPS index of 4d rank-one N=2 superconformal field theories and have clarified its general structure. We have explicitly constructed a full set of generators of the ring of Jacobi forms invariant under the action of the Weyl group of type E_n , which are important in the study of the elliptic genus of string-like objects in M-theory. We have also studied non-perturbative effects in a string/M-theory setup related to 2d Yang-Mills theory using the resurgence analysis.

研究分野：素粒子理論、弦理論、場の理論

キーワード：E弦 M5ブレーン BPS指数 Jacobi形式 例外群 2次元Yang-Mills リサージェンス

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

弦理論は一般相対論と量子論を矛盾なく両立させる数少ない理論のひとつであり、ゲージ理論および重力理論を自然に包含することから、素粒子物理の統一理論の最有力候補と目されている。一方で弦理論は未完成の理論であり、現在のところ具体的な定式化は摂動展開の形でのみ与えられている状況である。量子論的な理論の整合性から、摂動的弦理論は5種類の10次元超弦理論のみが許される。これらの弦理論の間には双対性(見かけの異なる理論同士の等価性)が見出されており、現在ではこれら5つの弦理論は単一の統一理論の5種類の特別な真空を表していると考えられている。この仮想的な統一理論はM理論と呼ばれている。M理論は弦理論以上に未完成の理論であるが、この理論の存在をひとたび仮定することで様々な新しい物理的・数学的事実が発見されてきたことから、M理論が何らかの重要な真実を含んでいることは疑いない。M理論の解明は弦理論に携わる研究者の究極的な目標のひとつである。

通常の場合の理論における粒子(0ブレーン)、あるいは弦理論における弦(1ブレーン)やDブレーンの代わりに、M理論ではM2ブレーンおよびM5ブレーンが物理的な励起の自由度を担う。弦理論においてDブレーン上の低エネルギー理論(Dブレーンのゆらぎによる低エネルギー励起を記述する理論)が通常のゲージ理論であったのと対照的に、M理論においてはM2ブレーンやM5ブレーン上の低エネルギー理論が何であるのか長らく分かっていなかった。ところが2008年になってAharony-Bergman-Jafferis-Maldacenaにより、巧妙に構成された3次元Chern-Simons理論がM2ブレーン上の励起を記述することが明らかにされた。この理論はABJM理論と呼ばれ、M理論を解明する上での重要な足がかりになると期待されている。またこの画期的な発見に触発され、M5ブレーン上の理論の探究も活性化しており、M理論の解明を目指す機運が国内外で高まっていた。

低次元の場合の理論や超対称性を持つ理論においては可積分性が現れることがしばしばあり、これを本格的に利用する研究がこの20年で飛躍的な発展を遂げている。可積分性を用いた手法は摂動近似計算の枠を超えて定量的な解析ができることから、今後ゲージ理論や弦理論の研究においてますます重要になると考えられる。ABJM理論の発見等によりM理論の解明の機運が高まっている中、M理論においても可積分性を利用する研究が展開されることが期待されていた。実際、研究開始時点の数年前から既にMinahan-ZaremboによるラージN極限(NはM2ブレーンの枚数)での可積分性や、Marino-Putrovによる三次元球面上のABJM理論の分配関数を計算する際に現れる可積分性などが見つかっていた。また代表者自身も2013年の共同研究において、ABJM理論のBPS方程式(超対称性を部分的に保つ解を定める方程式)に可積分性があることを見出し、ABJM理論のBPS方程式の解を系統的に構成する手法を構築していた。このようなM理論における可積分性の探究とその応用は、研究開始時点でまだ始まったばかりであった。

2. 研究の目的

本研究ではM理論における可積分性、特にM2ブレーンやM5ブレーン上の低エネルギー励起を統制している可積分構造を明らかにし、これを利用してM理論における物理状態のスペクトルを厳密に解き明かすことを目指す。まずM2ブレーンやM5ブレーン上の低エネルギー理論におけるBPS状態(超対称性を部分的に保つ状態)に着目し、そのスペクトルを統制する可積分構造を明らかにする。そしてこの可積分構造に基づき、BPS状態のスペクトルを系統的に調べる。得られた結果をもとに、最終的にはM5ブレーン上の低エネルギー理論の解明を目指す。

3. 研究の方法

BPS状態のスペクトルを系統的に計算するには、そのスペクトルの生成母関数であるBPS指数を求めればよい。BPS状態は超対称性を部分的に保つことから、そのスペクトルに対する繰り込み補正は厳しく統制されており、BPS指数は量子論的に厳密に計算することがしばしば可能である。特に、弦理論の場合にそうであったように、M理論においてもBPS指数の計算を、双対性を用いて低次元ゲージ理論や位相的弦理論の分配関数の計算に帰着させることが可能である。これにより、低次元理論や位相的弦理論が内包する既知の可積分構造を利用することができる。また、系のもつ対称性からもBPS指数の形に制限が加わる。そこで本研究では、双対性を利用して、M理論の様々な設定に現れるBPS指数を低次元理論の計算に焼き直し、そこでの可積分性および考えている設定が保持する対称性を最大限活用することで、BPS指数を求める。

4. 研究成果

多重M5ブレーン上の低エネルギー励起であるM弦については、2013年のHaghighat-Iqbal-Kozçaz-Lockhart-Vafaらの研究を契機として、短期間に急速な研究の進展があり、本研究開始時点において、既に基本的な部分がある程度解明されつつあった。一方、M弦と並んでもう一つM5ブレーン上に現れる基本的な励起としてE弦があり、こちらについてはM弦に比べて研究が進んでいなかった。研究代表者は以前からE弦の研究を手がけている強みもあったことから、本研究ではまずE弦の現れる設定に着目してM理論のBPS状態のスペクトルの解析を始めた。具体的にE弦は、M理論からヘテロティック弦理論を導く際に登場するM9ブレーンにM5ブレーンが重なる状況で、低エネルギー励起として現れる。このE弦のなす6次元理論、すなわちM9ブレーンに重なったM5ブレーン上に現れる低エネルギー理論はE弦理論として知られ、多重M5ブレーン上の理論と並ぶ、基本的な模型である。E弦理論はまた、矛盾を含まないあらゆる

る6次元超対称場の理論の中で最小限の場の構成を持つ理論であり、高次元の場の量子論の研究の観点からも基本的な重要性をもつ。

研究初年度の2014年にはこのE弦理論について、超対称性に基づく可積分構造を利用することで、量子論的に厳密なスペクトルを調べる研究を行った。一般に超対称性を持つ場の理論において、BPS指数は理論のスペクトルを特徴づける最も重要な関数であり、E弦理論のBPS指数を最も一般的な形で求めることは長年の懸案問題である。2014年度に行った研究では、E弦理論のE₈大域的対称性をD₄+D₄に部分的に破る設定を作ることで、BPS指数の大幅な簡略化が起こることを示した。これに基づき、4回巻きのエ弦の楕円種数を始めとする、これまで手の届かなかった物理量を具体的に構成した。この結果は、その後同年にKim-Kim-Lee-Park-VafaがE弦の楕円種数を局所化の方法を用いて系統的に計算する方法を提唱した際に、彼らの手法の検証に利用された。また、このE弦理論の簡略化されたBPS指数が、4次元N=2 SU(2) N_f=4共形ゲージ理論のNekrasov分配関数の三角関数的一般化を与えることを明らかにした。

本研究開始の前後数年間にわたって、多重M5プレーン上の理論の余剰次元をコンパクト化することで、多種多様な4次元超対称場の理論を実現し、その性質を調べる研究が大きく進展していた。これに倣い、本研究では2015年から2016年にかけて、E弦理論の研究成果を用いて基本的な4次元N=2超対称共形場理論の厳密な量子スペクトルを調べる研究を行った。4次元N=2超対称共形場理論は、一般にLagrangianに基づく直接的な記述を持たないこともあって、謎が多く解明の待たれている理論の一つである。現在では沢山の4次元N=2超対称共形場理論が知られているが、中でも古くから知られているものに、1次元のCoulomb branchをもつH₀,H₁,H₂,D₄,E₆,E₇,E₈型の一連の理論がある。M理論に限らず、一般に超対称性を持つ場の理論の研究においても、BPS指数は理論の厳密な量子スペクトルを特徴付ける最も基本的な関数である。上述の4次元N=2超対称共形場理論については、D₄型の場合を除き、BPS指数について、これまでほとんど調べられていない状況であった。一方でE弦理論については、BPS指数が長年にわたって調べられていた。2015-2016年の研究では、E弦理論を特別なモジュラスを持つ2次元トーラスにコンパクト化することで、上述のH₀,H₁,H₂,E₆,E₇,E₈理論を実現する方法を明らかにした。この実現法に基づき、これらの超共形場理論のBPS指数の構造を明らかにした。さらに、これらの理論のBPS指数を特徴付ける基本的な指数(exponents)と不変量を具体的に求めた。

多重M5プレーン上の理論やE弦理論は、粒子の代わりに弦を基本構成要素とする理論である。この弦の世界面上の2次元理論に対して定義される楕円種数は、超対称性指数を一般化したものであり、理論のスペクトルを特徴づける最も基本的な関数である。楕円種数は、弦の世界面が乗る2次元トーラスのモジュラスに関するモジュラー対称性と、大域的対称性の電荷に関する準二重周期性を併せ持つことから、一般にJacobi形式の組み合わせで書かれる。Jacobi形式とは、モジュラー不変性と準二重周期性を併せ持つ多変数正則関数である。加えて、E弦理論のように非自明な大域的対称性を持つ理論の楕円種数は、大域的対称性の電荷に作用するWeyl群の対称性をも併せ持つ。このため、これらの理論の楕円種数は一般に、Weyl群不変なJacobi形式を用いて構成される。Weyl群不変なJacobi形式は環をなし、その一般構造については25年前のWirthmüllerによる先駆的研究があるが、Weyl群が例外型E_nの場合については、先行研究がほぼ皆無であった。そこで本研究では2017年、この例外型Weyl群不変なJacobi形式について、研究を行った。本研究では、まずJacobiのテータ関数を用いていくつかの基本的な例外型Weyl群不変なJacobi形式を具体的に構成した。これをもとに、研究代表者が過去に構成したE弦理論のSeiberg-Witten曲線の性質を利用することで、例外型Weyl群不変なJacobi形式の環の生成子の完全な組を、初めて具体的に構成した。

曲がった背景時空におけるM理論を一般的に解析することは大変難しいが、特別なクラスの背景においては、一部解析ができる場合がある。中でも重要なものとして、複素3次元(実6次元)のCalabi-Yau多様体を含む時空が挙げられる。このような時空においては、M理論の基本構成要素であるM2プレーンがCalabi-Yau多様体の2サイクルに巻きついたものが、BPS状態となり、低エネルギーでの励起を担う。これらのBPS状態の分配関数は、Calabi-Yau多様体上の位相的弦理論の分配関数として計算することができる。位相的弦理論の分配関数は、多くの場合に弦結合定数による摂動展開の形で計算される。一方で、場の理論においては、インスタントンの寄与に代表されるような、非摂動効果がよく知られている。M理論や弦理論が低エネルギーで場の理論を再現する理論である以上、M理論においても非摂動効果は確実に存在する。2018年度は、これらのM理論や弦理論における非摂動効果を、近年着目されているリサーチェンス理論を用いて調べる研究を行った。リサーチェンス構造は、量子力学や微分方程式の理論において古くから知られており、摂動級数の発散の漸近的振る舞いと非摂動補正との間に関係がつく現象を指す。Calabi-Yau多様体上の位相的弦理論については、各種数における分配関数が単なる数となるような簡単な場合においては、リサーチェンス理論を適用する先行研究があったが、より本格的な、分配関数が関数となる場合においては、研究が皆無であった。本研究では解析の対象として、分配関数が2次元Yang-Mills理論の分配関数を表すよく知られた例、すなわち分配関数がモジュライパラメータの関数となる場合を選び、非摂動補正項の形を全次数で算出した。特に非摂動補正の最も主要な項について、リサーチェンス理論に基づき、精密な数値計算による検証を行った。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計5件（うち査読付論文 5件/うち国際共著 0件/うちオープンアクセス 4件）

1. 著者名 Kazumi Okuyama and Kazuhiro Sakai	4. 巻 08(2018)065
2. 論文標題 Resurgence analysis of 2d Yang-Mills theory on a torus	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Journal of High Energy Physics	6. 最初と最後の頁 0-44
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/JHEP08(2018)065	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -
1. 著者名 Kazuhiro Sakai	4. 巻 13(1)
2. 論文標題 E _n Jacobi forms and Seiberg-Witten curves	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Communications in Number Theory and Physics	6. 最初と最後の頁 53-80
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.4310/CNTP.2019.v13.n1.a2	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Kazuhiro Sakai	4. 巻 07(2016)046
2. 論文標題 BPS index and 4d N=2 superconformal field theories	5. 発行年 2016年
3. 雑誌名 Journal of High Energy Physics	6. 最初と最後の頁 0-15
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/JHEP07(2016)046	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -
1. 著者名 Kazuhiro Sakai	4. 巻 no.3, 033B09
2. 論文標題 Topological string amplitudes for the local half K3 surface	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Progress of Theoretical and Experimental Physics	6. 最初と最後の頁 1-29
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1093/ptep/ptx027	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

1. 著者名 Kazuhiro Sakai	4. 巻 12(2014)047
2. 論文標題 A reduced BPS index of E-strings	5. 発行年 2014年
3. 雑誌名 Journal of High Energy Physics	6. 最初と最後の頁 0-20
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/JHEP12(2014)047	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている(また、その予定である)	国際共著 -

[学会発表] 計7件(うち招待講演 6件/うち国際学会 3件)

1. 発表者名 Kazuhiro Sakai
2. 発表標題 E _n Jacobi forms and Seiberg-Witten curves
3. 学会等名 Topological Field Theories, String theory and Matrix Models (Lebedev Physical Institute, Moscow, Russia) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 酒井一博
2. 発表標題 Jacobi形式とSeiberg-Witten曲線
3. 学会等名 日本物理学会 2017年秋季大会(宇都宮大学、栃木県)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Kazuhiro Sakai
2. 発表標題 BPS index and 4d N=2 SCFTs
3. 学会等名 NCTS Summer workshop on Strings and Quantum Field Theory (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 酒井一博
2. 発表標題 BPS index and 4d N=2 superconformal field theories
3. 学会等名 超対称理論の数理的理解の進展 (招待講演)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 Kazuhiro Sakai
2. 発表標題 BPS index of E-strings
3. 学会等名 Workshop on Topological String and Related Topics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2015年

1. 発表者名 酒井一博
2. 発表標題 BPS index of E-strings
3. 学会等名 研究会「数学・物理における可積分性の諸相」(招待講演)
4. 発表年 2015年

1. 発表者名 Kazuhiro Sakai
2. 発表標題 Nekrasov-type formula for E-string theory
3. 学会等名 Workshop "Finite-Size Technology in Low-Dimensional Quantum Systems (VII)" (招待講演)
4. 発表年 2014年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----