

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 30 年 5 月 23 日現在

機関番号：14101

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2014～2017

課題番号：26400391

研究課題名(和文)非整数運動学に対する変分原理の定式化とその応用

研究課題名(英文)Formulation of variational principle for fractional kinetics and its applications

研究代表者

阿部 純義 (ABE, Sumiyoshi)

三重大学・工学研究科・教授

研究者番号：70184215

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,200,000円

研究成果の概要(和文)：非整数Fokker-Planck方程式に対する変分原理の定式化を行なった。作用積分の構成に際し、確率分布の規格化条件と補助場のゲージ変換構造との関係を明らかにした。

更に、正準理論を構築し、非整数Fokker-Planck方程式をLiouville方程式として表現した。この際、非整数Fokker-Planck方程式の時間的非局所性に付随して、ふたつの異なるハミルトニアンが存在するという問題が生じた。これに関して、非同時刻Poisson-Dirac括弧関係をたてることにより、両者が同一の時間発展を生成することを証明した。

研究成果の概要(英文)：The variational principle has been formulated for the fractional Fokker-Planck equation. In the construction of the action integral, the relation has been revealed between the constraint on the normalization condition on a probability distribution and a gauge-theoretic structure associated with the auxiliary field introduced in the action integral.

In addition, the canonical theory has been constructed, and the fractional Fokker-Planck equation has been recast into the form of the Liouville equation. There, a novel problem concerning the presence of two different Hamiltonians has appeared. Regarding this point, the non-equal-time Poisson-Dirac bracket relations have been set up, and, based on them, it has been shown that the two different Hamiltonians actually generate identical time evolution.

研究分野：物理学

キーワード：非整数運動学 変分原理 正準形式

### 1. 研究開始当初の背景

Montroll と Weiss によって提唱された連続時間ランダムウォークの概念は、ベキ則的待ち時間分布や Lévy フライトの観測・発見をとおして再び現代物理学の問題となった。特に、多くの複雑系に見られる異常拡散やそれに伴う非自明なスケーリング現象を記述する非整数運動学は、拡張された確率過程・異常輸送現象をもつ半導体やナノ系・カオス力学系・フラクタル・無秩序系などとの関連において盛んに議論されている。

研究開始当初、報告者は非整数 Fokker-Planck 方程式の新しい解析方法として、変分原理を発展させる段階にあった。この研究の意義は明白であった。変分原理によって、方程式の近似的解析解が得られることにより、系の種々の物理的側面に対してコヒーレントな理解を獲得することが可能になるからである。

### 2. 研究の目的

報告者の研究目的は、時空的非整数 Fokker-Planck 方程式に対する時間依存変分原理を更に発展させること、および異常拡散現象の一層の理解を目指してより包括的なアプローチを展開することであった。

特に、時間反転不変性をもたない運動学的方程式に対する変分原理の構成は、変数の空間の拡大(補助場の導入)を含む、理論的な問題を含んでいる。また、時間的境界条件(初期条件および終条件)と変分原理の整合性、および確率分布の規格化条件に関連する「補助場のゲージ変換構造」を明らかにする必要があった。

更に、これを機会に、実在の複雑系が呈する異常拡散現象の解析の研究にも取り組むことも目的の一つとなっていた。

### 3. 研究の方法

変分原理の定式化とそれに関連する研究については、数理的に行なわれた。特に、Riemann-Liouville 型 fractional calculus、場の

古典論における Dirac の一般化された正準理論およびゲージ理論の方法が有効であった。

一方、現実の複雑系現象を対象とする研究は、理論的アイデアに基づくデータ解析を行った。火山性群発地震の拡散の性質の研究については、Etna 山および Iceland の一連の火山について公開されているデータを用いた。解析にあたっては、報告者と共同研究者がこれまで取り組んできた複雑系研究の方法を用いた。

### 4. 研究成果

上述のように、非整数 Fokker-Planck 方程式は時間反転不変性をもたないため、変分原理を考える上で作用積分を構成するためには、変数の空間を拡張することが考えられる。すなわち、確率分布という変数の他に補助場を導入する。変分を実行するにあたって、確率分布の規格化条件に関する拘束条件が課されるべきであるが、この条件は、実は補助場のもつある種のゲージ変換構造によって、既に保証されていることが分かった。また、時間的境界条件も変分原理と整合させる必要があるが、この問題も、確率分布に対する初期条件、補助場に対する終条件、という形式で解決した。具体的な解析解を得るためには、確率分布関数と補助場に対する Ansatz を課し、Rayleigh-Ritz 流の方法を展開した。

研究を進めて行った過程で、Lagrange 形式から、更に Hamilton 正準形式の定式化に進む問題が興味深い課題として現れた。これは、一般に、正準形式は時間的に局所的な理論であるが、非整数 Fokker-Planck 方程式は時間的に非局所的であるという点から派生した問題である。正準形式を構築する際、確率分布と補助場に正準共役な運動量の定義は、Dirac の一般化された正準理論の用語での第 2 種拘束条件に導く。それらを消去するため、通常の方から従って、Poisson 括弧から Dirac 括弧を用いる記述に移行した。ところで、上述の時間的非局所性に起源をもつ、特異な問題

が現れた。互いに異なるハミルトニアンがふたつ存在するのである。従って、それらが同一の時間発展を生成することを証明する必要が生じた。この問題を解決するために、異なる時刻における正準変数間の Dirac 括弧関係を決定する必要があった。この研究は成功し、異なるふたつのハミルトニアンが、実際、同一の時間発展を生成することが証明された。これによって、非整数 Fokker-Planck 方程式を Liouville 方程式の形に帰着された [1]。

更に、実在の複雑系が呈する異常拡散現象の例として、火山性群発地震の解析も行った。実データとして、公開されている Etna 山のものと Iceland の一連の火山についてのものを用いた。その結果、火山性群発地震の呈する特異な性質を新たに発見することが出来た。それらは、火山性群発地震は劣拡散を呈すること、待ち時間分布がベキ則に従うこと、空間的ジャンプ距離分布は、通常の指数関数分布であること、プロセスの非 Markov 性、などを含む。これらの成果は学術論文として 2015 年に EPL(Europhysics Letters)誌に出版され、その年の Best Papers のひとつに選ばれた。

また、研究期間中、他の問題について研究の機会もあり、それぞれ学術論文として出版済みおよび印刷中である [2-5]。

<文献> (5. [雑誌論文] に含まれないもの)

[1] S. Abe, “Hamiltonian formulation of fractional kinetics”, European Physical Journal Special Topics, 印刷中. 査読あり.

[2] V. Usmanova, Y. V. Lysogorskiy and S. Abe, “Aftershocks following crash of currency exchange rate: The case of RUB/USD in 2014”, EPL Vol. 121, 48001 (2018). 査読あり.

[3] Y. Yokoi and S. Abe, “On quantum-mechanical origin of statistical mechanics”, Journal of Physics: Conference Series, 印刷中. 査読あり.

[4] S. Abe, “Estimating entanglement in a class

of  $N$ -qudit states”, Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki, 印刷中. 査読あり.

[5] S. Abe, “On the Lindblad equation for open quantum systems: Rényi entropy rate and weak invariants”, Journal of Physics: Conference Series, 印刷中. 査読あり.

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 17 件)

① Y. Yokoi and S. Abe, “Derivation of Bose-Einstein and Fermi-Dirac statistics from quantum mechanics: gauge-theoretical structure”, Journal of Statistical Mechanics Vol. 2018, 023112 (2018). 査読あり.

② S. Abe and N. Suzuki, “Subdiffusion of volcanic earthquakes”, Acta Geophysica Vol. 65, p. 481 – p. 489 (2017). 査読あり.

③ S. Abe, “Invariants of Fokker-Planck equations”, European Physical Journal Special Topics Vol. 226, p. 529 – p. 532 (2017). 査読あり.

④ C. Ou, R. V. Chamberlin, and S. Abe, “Lindbladian operators, von Neumann entropy and energy conservation in time-dependent quantum open systems”, Physica A Vol. 466, p. 450 – p. 454 (2017). 査読あり.

⑤ S. Abe, “Weak invariants of time-dependent quantum dissipative systems”, Physical Review A Vol. 94, 032116 (2016). 査読あり.

⑥ R. V. Chamberlin, S. Abe, B. F. Davis, P. E. Greenwood, and A. S. H. Shevchuk, “Fluctuation theorems and  $1/f$  noise from a simple matrix”, European Physical Journal B Vol. 89, 185 (2016). 査読あり.

⑦ S. Abe, “Time evolution of Rényi entropy under the Lindblad equation”, Physical Review E Vol. 94, 022106 (2016). 査読あり.

⑧ C. Ou and S. Abe, “Exotic properties and

optimal control of quantum heat engine”, EPL Vol. 113, 40009 (2016). 査読あり.

⑨ M. Hattori and S. Abe, “Path probability of stochastic motion: A functional approach”, Physica A Vol. 451, p. 198 – p. 204 (2016). 査読あり.

⑩ S. Abe and D. A. Tayurskii, “Clifford numbers from Bohr-Sommerfeld quantization of Grassmann-variant systems”, JETP Letters Vol. 102, p.387 – p.390 (2015). 査読あり.

⑪ S. Abe and N. Suzuki, “Anomalous diffusion of volcanic earthquakes”, EPL Vol. 110, 59001 (2015). 査読あり.

⑫ S. Abe, “Reply to ‘Comment on ‘Similarity between quantum mechanics and thermodynamics: Entropy, temperature, and Carnot cycle’””, Physical Review E Vol. 91, 056102 (2015). 査読あり.

⑬ S. Abe and Y. Matsuo, “Phase-space representation of completely positive quantum operation: Invertible subdynamics of two-mode squeezed states”, Physical Review E Vol. 91, 012126 (2015). 査読あり.

⑭ S. Abe and N. Suzuki, “Universal clustering structure and  $C \sim 0.85$  scaling in complex earthquake networks”, Physica A Vol. 421, p. 343 – p. 346 (2015). 査読あり.

⑮ S. Abe and A. Oohata, “On the variational principle for fractional kinetic theory”, Journal of Physics: Conference Series Vol. 604, 012001 (2015). 査読あり.

⑯ S. Abe, “Conditional maximum-entropy method for selecting prior distributions in Bayesian statistics”, EPL Vol. 108, 40008 (2014). 査読あり.

⑰ Y. Matsuo and S. Abe, “Completely-positive quantum operations generating thermostistical states: A comparative study”, Physica A Vol. 409, p.130-p.137 (2014): Corrigendum Vol. 422, p. 210 (2015). 査読あり.

[学会発表] (計 9 件)

① S. Abe, “Estimating entanglement in a class of  $N$ -qudit states”, at The International Kazan Conference on Probability Theory and Mathematical Statistics (November 7-10, 2017, Kazan, Russia). 基調講演.

② S. Abe, “C-MaxEnt and Bayesian approach to extreme values”, at The 5th International Workshop on Statistical Physics and Mathematics for Complex Systems (October 13-15, 2017, Wuhan, China). 招待講演.

③ S. Abe, “Rényi entropy rate under Lindblad equation”, at The 14th Joint European Thermodynamics Conference (May 21-25, 2017, Budapest, Hungary). 招待講演.

④ S. Abe, “Anomalous diffusion of volcanic seismicity”, at Dynamics Days: Latin America and the Caribbean (October 24-November 1, 2016). 招待講演.

⑤ S. Abe, “Anomalous diffusion in volcanic seismicity”, at Solvay Workshop - Bridging the gaps at the PCB interface: Multiscale Modelling in Physics, Chemistry and Biology (April 19-21, 2016, Brussels, Belgium). 招待講演.

⑥ S. Abe, “Building a bridge between quantum mechanics and thermodynamics”, at International Workshop on Nonlinearity, Nonequilibrium and Complexity: Questions and Perspectives in Statistical Physics (November 29-December 4, 2015, Mexico City, Mexico). 招待講演.

⑦ S. Abe, “Anomalous Diffusion in Volcanic Seismicity”, at Complex Systems – Digital Campus 2015, World e-Conference UNESCO UniTwin (September 30-October 1, 2015). 招待講演.

⑧ S. Abe, “Quantum-Mechanical Analog of the Carnot Engine: Efficiency and Maximum-Power Condition”, at The 6th International Conference

on Mechanical Science and Engineering (July 17-19, 2015, Qingdao, China). 招待講演.

⑨ S. Abe, “Variational Principle for Fractional Kinetics and Anomalous Diffusion”, at The 4th International Workshop On Statistical Physics and Mathematics for Complex Systems (October 12-16, 2014, Yichang, China). 招待講演.

[図書] (計 2 件)

① S. Abe and H. J. Herrmann, eds. “Nonlinearity, Nonequilibrium and Complexity: Questions and Perspectives in Statistical Physics”, European Physical Journal Special Topics Vol. 226, p. 321-532 (2017). 共編著.

② A. Wang, S. Abe, and W. Li, eds., Proceedings of “The 4th International Workshop on Statistical Physics and Mathematics for Complex Systems (SPMCS 2014)”, Journal of Physics: Conference Series Vol. 604, 論文番号 011001--012024 (2015). 共編著.

[産業財産権]

○出願状況 (計 件)

名称：  
発明者：  
権利者：  
種類：  
番号：  
出願年月日：  
国内外の別：

○取得状況 (計 件)

名称：  
発明者：  
権利者：  
種類：  
番号：  
取得年月日：  
国内外の別：

[その他]

ホームページ等

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

阿部 純義 (ABE, Sumiyoshi)

三重大学・大学院工学研究科・教授

研究者番号：70184215

### (2) 研究分担者

( )

研究者番号：

### (3) 連携研究者

( )

研究者番号：

### (4) 研究協力者

鈴木 徳一 (SUZUKI, Norikazu)

OU, Congjie

CHAMBERLIN, Ralph V.

LYSOGORSKIY, Yury V.