様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科研費
KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　　元 年　　６ 月 ２４ 日現在

機関番号：３３９０３
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2014～2018
課題番号：２６４００４１０

研究課題名（和文）乱流境界層の統計理論の展開

研究課題名（英文）Development of Statitical Theory of Turbulent Boundary Layer

研究代表者
金田　行雄（KANEDA, Yukio）

愛知工業大学・工学部・教授

研究者番号：１０１０７６９１

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　2,800,000円

研究成果の概要（和文）：自然や科学技術の諸分野でしばしば固体壁近傍で流れが空間的に急激に変化する層(境界層)が現れ、その存在は流れ場全体にも大きな影響を与える。本研究では平行２平板間乱流（TCF）の大規模直接数値シミュレーション(DNS)のデータ解析に基づいて乱流境界層を特徴づけるいくつかの代表的な長さ（スケール）の壁からの距離と方向への依存性について定量的な知見を得た。
また、熱平衡系の統計力学で知られた線形応答理論の考えを一般化し、乱流境界層の速度場のいくつかの統計量に対する理論を導き、その結果がTCFの大規模DNSデータとよく一致することを示した。

研究成果の学術的意義や社会的意義
本研究では熱平衡系の統計力学で知られた線形応答理論の考えを一般化して乱流境界層の統計理論を導き、その理論が乱流の大規模DNSデータとよく合うことを示した。このことは、熱平衡系と乱流境界層の間にそのお互いの見かけの違いにも関わらず何らかの共通性があることを示唆しており、乱流に限らない超多自由度の非線形力学系の理解に貢献すると期待される。
また、その理論の与える有限のレイノルズ数による影響の評価および本研究で得られた乱流境界層中の代表的長さについての知見は、乱流の予測や制御を必要とする科学技術の諸分野への貢献が期待される。

研究成果の概要（英文）：Turbulent boundary layer (TBL) near solid boundary is common in science and technology. In TBL, the flow field changes rapidly in space, and the TBL strongly affects the whole flow field. In this study, we clarified quantitatively the position- and direction- dependence of representative length-scales characterizing the TBL, on the basis of the data of large-scale direct numerical simulation (DNS) of turbulent flow between two parallel planes (turbulent channel flow: TCF).
By generalizing the idea of linear response theory well known in the statistical mechanics of systems at or near thermal equilibrium state to TBL, we derived a theory for one-point statistics in the TBL, and confirmed that the theory is in good agreement with the data of high resolution DNS of TCF.

研究分野：数理物理・物性基礎

キーワード：乱流境界層　統計理論　直接数値シミュレーション　線形応答理論　ラグランジュ的繰り込み理論　統計的普遍則　壁乱流　対数則

様　式　C－19，F－19－1，Z－19，CK－19（共通）

１．研究開始当初の背景

乱流は日常生活や自然，科学技術の諸分野においてごく普通に見られる流れの状態である．それぞれの流れは境界条件や初期条件などに敏感に依存し，千差万別である．しかしながらその違いにも関わらず，レイノルズ数 Re（乱流の非線形性の強さを表す指標）が十分高い乱流中では境界条件や初期条件などの詳細によらない統計的普遍則があると考えられている．

流れの境界の影響が無視できる場合のこのような統計的普遍則については，これまで多くの優れた研究がなされてきた．しかし一方，現実の多くの流れでは，例えば車や飛行機などの物体を過ぎる流れや砂嵐などに見られるように固体境界の存在が流れに大きな影響を及ぼす．そのような境界を持つ乱流（壁乱流）では境界近傍に粘性のため流れが空間的に急激に変化する乱流境界層と呼ばれる層が発生する．境界層の存在は流れ場全体に大きな影響を及ぼすため，その普遍則の解明は流れの予測や制御などの実用上も重要である．当然，多くの研究がなされてきたが依然としてその解明，理論構築は未解決の課題として知られている．

２．研究の目的

乱流の直接数値シミュレーション（DNS）は，よく制御された条件下で，実験や観測に伴う不確定性や誤差なしに詳細なデータが得られるという利点を持つ．近年大規模 DNS による計算科学的方法が著しく進歩しており，計算科学的方法による乱流解明のブレークスルーに国内外で大きな期待が寄せられている．本研究の目的は大規模 DNS によるデータの解析に基づいて，乱流境界層の統計理論を展開することである．

３．研究の方法

十分高い Re の乱流境界層中では一般に，平均流速分布の壁からの距離 y への依存性が対数則と呼ばれる式によく合う領域（対数則領域）が現れ，その対数則領域の理解が壁乱流や乱流境界層の普遍則の解明に重要であることが知られている．対数則領域を示す最も規範的な乱流のひとつとして平行な 2 平板間の乱流（TCF: Turbulent Channel Flow）がある．

統計理論の検証に足る十分広い対数則領域を持つ乱流境界層が実現されるには，その Re は十分高い必要がある．一方，乱流 DNS で扱うべき力学的自由度数は Re の増加とともに急激に増加する．そのため，統計理論の検証に足る DNS は必然的に大規模なものになる．本研究では TCF の大規模 DNS データの解析に基づいて理論の展開，検証を行う．統計理論としてはとくに熱平衡系の統計力学で知られた線形応答理論と類似の枠組みを持つ理論，およびこれまでの恣意的な調節パラメータを含まないスペクトル理論の中でもっとも簡潔で，かつ理論的整合性が高いとされる Lagrange 的繰りこみ理論（LRA），の二つの理論の視点を手掛かりにその展開を目指す．

４．研究成果

本研究の主な成果は以下の通りである．

(1) 代表的長さスケール

乱流中には一般に，乱れのエネルギーの主要部分を担う大きな渦の代表的長さスケール(大きさ)L から粘性散逸の主要部分を担う小さな渦の代表的長さスケールηに至る大小さまざまなスケールの渦が存在する．レイノルズ数Reが大きいほどその比L/ηは大きくなる．乱流境界層においては，一様等方性乱流と違いそれらのスケール分布は空間的に一様ではなく壁からの距離や方向に依存する．

本研究では壁レイノルズ数 Re_τ が最大 5120 に及ぶ TCF の大規模 DNS のデータを用いて乱流境界層を特徴づけるいくつかの代表的長さスケールの解析を行い，以下の知見を得た．（詳しくは下記５．主な発表論文等[雑誌論文]の①参照） 以下，平行な 2 平板は y 軸に垂直，平均圧力勾配は一定で，その圧力勾配と平均流 $\boldsymbol{U}$ は x 軸方向にあるとする．

①　一点統計量

DNS データ解析によると平均流速分布 $U(y)$が対数則によく一致し，単位質量当たりの平均エネルギー散逸量$<\varepsilon>$がよく知られた$<\varepsilon^+>=1/(\kappa y^+)$によく一致する層（例えば $Re_\tau=512$ の DNS ではおおよそ $50<y^+<1000$）があることを確認した．ここで，括弧$<...>$は適当な統計平均，上付き添え字$^+$は壁単位といわれる量による無次元化を表し，κはカルマン定数と呼ばれる定数でありおおよそ0.4である．

本研究では $S=dU(y)/dy$, $l_{CN}=<\varepsilon>^{1/2}/S^{3/2}$ によって定義される長さ l_{CN}, および$\eta=\nu^{3/4}/<<\varepsilon>^{1/4}$（$\nu$は動粘性係数）によって定義される長さ$\eta$の y 依存性を解析した．乱流境界層中の大きさが l 程度の渦の運動を考える場合,その運動を支配する (i)平均流との相互作用(C), (ii)大きさが l 程度の渦同士の非線形相互作用(N), (iii) 粘性効果(V), の三つの大きさのおおよその見積もりを(圧力項を無視する範囲で)適当な仮定の下でこれらのスケールの知見から得ることができる．その見積もりによれば $l\sim l_{CN}$ のとき C と N が，一方 $l\sim\eta$のとき N と V がお互いおおよそ同程度の大きさになる．本研究のデータ解析によれば，たとえば $Re_\tau=5120$ の DNS では $100<y^+<1000$ の範囲で比 l_{CN}/ηは 10 以上であることなどが分かった．

②　二点統計量（速度相関関数）

乱流中に存在する大小さまざまな渦分布の統計を表す量として上に述べたl_{CN}およびηなどの一点統計で表されるもののほかに多点統計量に関するものがある．本研究では多点統計量の中で最も基本的な 2 点速度相関関数 $Q_{ii}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{r})=\langle u_i(\boldsymbol{x})u_i(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{r})\rangle$（$i$ についての和はとらない）について，これまで研究がきわめて少なかった，ベクトル $\boldsymbol{r}$ が壁に垂直な方向のものを含めて解析し，$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{0}$ の近傍における Q_{ii} の $\boldsymbol{r}$ 依存性を示す長さスケールλおよび Q_{ii} の半値幅 d について，その方向および壁からの距離への依存性を明らかにした．ここで $\boldsymbol{x}=(x_1, x_2, x_3)=(x, y, z)$，$x_1=x$ は主流方向，$x_2=y$ は壁垂直方向，$x_3=z$ はスパン方向の位置座標，$\boldsymbol{u}=(u_1, u_2, u_3)=(u, v, w)$は平均流を差し引いた速度ベクトルであり，時間因子は省略する．乱流場が主流およびスパン方向に統計的に一様な場合，Q_{ii} は x, z に依存しない．

(i)テイラーマイクロスケール

$Q_{ii}(\boldsymbol{x}, r\boldsymbol{e}_j)$の $r=0$ における r についての 2 階微分と $Q_{ii}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{0})$とを用いて一つの長さスケール$\lambda$（テイラーマイクロスケール)が定義できる．ただし，ここで $\boldsymbol{e}_j$ は x_j 方向の単位ベクトルである．本研究では i, j がそれぞれ 1, 2, 3 の 3 通り，合計 3×3=9 個の方向についてのλの解析を行った．その結果対数則領域で，λは非等方的 i, j 依存性を持つけれども，その y 依存性は等方性乱流に対して知られた関係式に簡単な再解釈を施して導かれる関係式とよく整合することなどが分かった．

(ii)半値幅

$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{0}$ の十分近傍ではなく，より大きな $r=|\boldsymbol{r}|$における Q_{ii} を特徴づけ得る指標として，$Q_{ii}(\boldsymbol{x}, d\boldsymbol{e}_j)/Q_{ii}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{0})=1/2$ を満たす d として定義される半値幅 d がある．d はλと同様に y, i, j に依存している．本研究では i, j がそれぞれ 1, 2, 3 の 3 通り，合計 3×3=9 個の方向について d の解析を行った．その結果対数則領域で，d は強い非等方的 i, j 依存性を持つこと，またその y 依存性についてはおおよそ y の a 乗に比例し，a は LRA の示唆する 1 に近いけれど，厳密には 1 に等しくないことなどが分かった．

(2) 統計理論

乱流と同じく超多自由度の系を扱う統計力学の一つのお手本として熱平衡系に対する統計力学がある．熱平衡系の統計力学では巨視的な普遍法則として，ボイル・シャルルの法則のように熱平衡状態そのものを表現するものだけでなく，熱平衡系に加えられた攪乱に対する系の応答にも普遍的法則があり，その法則は線形応答理論（LRT）でよく説明されることが知られている．

その LRT の考えはこれまで統計的に一様なせん断乱流や成層乱流などの無限流体中の乱流については，その慣性小領域に適用できるように拡張され，その結果は実験や DNS と整合することが示されている．本研究では LRT の考え方をさらに拡張し，壁の存在の影響が本質的である乱流境界層についての理論を導いた．(詳しくは下記５．主な発表論文等[雑誌論文]の②参照）

十分高い Re_τの TCF 中で壁からの距離 y が一定の面を通過する単位質量当たりの x 方向の乱流による運動量流束の統計平均$\langle uv\rangle$は，y が $h>>y>>l_\tau$を満たす領域においては，y によらず空間的にほぼ一定値$(-u_\tau^2)$となることが弱い仮定の下で厳密に示される．ここで，$2h$ は平行 2 平板間の距離，l_τ と u_τはそれぞれ壁摩擦長さ，壁摩擦速度と呼ばれる壁近くの領域の統計を代表する長さと速度，$Re_\tau=(h/y)(y/l_\tau)$であり，$\langle uv\rangle$がほぼ一定$(-u_\tau^2)$となる層を慣性層と呼ぶ．

本研究では

(a)一様等方性乱流中の大きな渦から小さな渦へのエネルギー輸送と，

(b)乱流境界層における壁に垂直な方向への運動量輸送

の類似性に着目して，よく知られた Kolmogorov の普遍的局所平衡理論からの類推に基づいて，

(i)Re_τが無限大の極限では，慣性層においてある種の普遍的局所平衡性が成り立つ，具体的には十分局所的なダイナミクスで支配される統計は第 1 近似として，y と u_τのみによって決まる局所平衡状態にあるとし，さらに

(ii) y/h および l_τ/y が有限であることの影響はその平衡状態への攪乱とみなせる，

として理論を導いた．

その理論は慣性層の 1 点統計量$\langle uv\rangle$，$\langle vv\rangle$，$\langle ww\rangle$について，有限の $Re_\tau=(h/y)(y/l_\tau)$すなわち(y/h)，(l_τ/y)が有限であることの影響の見積もりを与えるものである．その理論は Yamamoto と Tsuji (2018)および Lee と Moser (2015)によるそれぞれ Re_τ=8000 および 5200 におよぶ TCF の大規模 DNS によるデータとよく合っていることが分かった．また，その理論は平均流速分布についての対数則をこれまで知られている導出法とは違う方法で導く，すなわち対数則の新しい解釈をも提案しているものである．

LRT の考えは形式的には$\langle uu\rangle$の y 依存性の導出にも適用できるけれども，TCF の大規模 DNS データとの比較によれば，その理論と DNS の一致は$\langle uv\rangle$，$\langle vv\rangle$，$\langle ww\rangle$についてほどにはよくないことが分かった．このことは Q_{ii} の半値幅（上記(1)-②の(ii)参照）についての DNS データの解析結果と整合していて，$\langle uu\rangle$には非局所的な影響が十分弱くないこと，また理論の成立には物理空間および渦のスケール（大きさ）空間の 2 重の意味での局所性が重要な役割を果たしていることを示唆している．

なお，上記(i), (ii)の考えは LRA の解析とも整合するものである．本研究では LRA 方程式の数値

解析の研究も行った. (下記５．主な発表論文等[学会発表]の⑥, ⑩等)
LRA は 2 点相関関数を使い構成される 2 点完結近似の一つである. 2 点完結近似を乱流境界層に適用すると, 壁に平行な方向への統計的一様性を仮定できるとしても空間について 4 つの独立変数を扱う必要があるため, その解析は数値的にも困難である. 対数則領域では, ある相似形を仮定すればその独立変数の数を一つ減らすことができ解析が容易になる. 本研究では LRA がその相似形の仮定と整合することを確認した. また, DNS データ解析の範囲では, 2 点速度相関関数について, ある程度違いはあるけれど近似的にはその相似形に矛盾しないことが示された. さらに, その相似形を仮定し, 空間的微分積分については LRA と類似の構造を持つ準正規理論による近似式をもとに, とくに境界近傍で特異性をもつ係数の取り扱いに注意を払い計算手法を定め, 数値解析を行った. その際, 2 点の距離が格子点間隔より小さい領域におけるエネルギー散逸の影響の取り扱いが重要であることなどが分かった. これらの知見に基づく, 乱流境界層に対する LRA 方程式を含む 2 点完結近似式の数値解析についての今後の発展が望まれる.

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕（計 2 件）

① K. Morishita, T. Ishihara, and Y. Kaneda, Length Scales in Turbulent Channel Flow, J. Phys. Soc. Jpn., **88** (2019) 064401-1-7. (査読有)
DOI 10.7566/JPSJ.88.064401

② Y. Kaneda, Y. Yamamoto, and Y. Tsuji, Linear Response Theory for One-Point Statistics in the Inertial Sublayer of Wall-Bounded Turbulence, Phys. Rev. Lett., **122** (2019) 194502-1-5. (査読有)
DOI: 10.1103/PhysRevLett.122.194502

〔学会発表〕（計 16 件）

① 金田 行雄，乱流境界層の対数則領域における粒子拡散，第 64 回「乱流遷移の解明と制御」研究会，2019 年

② 金田 行雄，山本 義暢，辻 義之，乱流境界層中の 1 点統計の線形応答理論，日本物理学会第 73 回年次大会，2018 年

③ Y. Kaneda, Y. Yamamoto, and Y. Tsuji, Linear response theory for one point statistics in the inertial sublayer of turbulent channel flow, Workshop on Fundamental Aspects of Geophysical Turbulence III, 2018 年

④ Y. Kaneda, Y. Yamamoto, and Y. Tsuji, Linear response theory for one point statistics in the log-law region of wall bounded turbulence, 70th Annual Meeting of the APS Division of Fluid Dynamics, 2017 年

⑤ Y. Kaneda, Influence of small but finite viscosity on the statistics in the log-law region of wall-bounded turbulence, Turbulence Conference at Mauna Kea (TCM-2017), AAAS Pacific Division 98th Annual Meeting, 2017 年

⑥ 吉田 恭，金田 行雄，壁乱流対数則領域の二点完結近似 II, 日本物理学会第 72 回年次大会，2017 年

⑦ Y. Kaneda, K. Morishita, and T. Ishihara, Two-point statistics in the log-law region in DNS of turbulent channel flow, 24th International Congress of Theoretical and Applied Mechanics, 2016 年

⑧ 金田 行雄，森下 浩二，石原 卓，壁乱流対数則領域の二点統計- Karman 定数と Kolmogorov 定数，京大数理解析研究所 RIMS 研究集会 「高レイノルズ数の流れを記述するモデルの数理」，2016 年

⑨ 金田 行雄，森下 浩二，石原 卓，壁乱流対数則領域の二点統計－DNS データ解析－，日本物理学会第 71 回年次大会，2016 年

⑩ 吉田 恭，金田 行雄，壁乱流対数則領域の二点完結近似，日本物理学会第 71 回年次大会，2016 年

⑪ Y. Kaneda, K. Morishita, and T. Ishihara, Statistics in the log-law region in DNS of turbulent channel flow, JSPS A3 Foresight Program “Workshop on Vortex Dynamics and Turbulence”, 2016 年

⑫ Y. Kaneda, K. Morishita, T. Ishihara, K. Yoshida, M. Yokokawa, and A. Uno, Attempts at computer aided understanding of turbulence - Statistics in log-law region and isotropic turbulence, JJ70 Conference, 2015 年

⑬ Y. Kaneda, K. Morishita, T. Ishihara, M. Yokokawa, and A. Uno, Length scales in turbulent flows, Workshop on Fundamental Aspects of Geophysical Turbulence II, 2015 年

〔その他〕
ホームページ等
http://www.math.nagoya-u.ac.jp/~kaneda/home_kaneda.htm

６．研究組織

(1)研究分担者
研究分担者氏名：石原 卓

ローマ字氏名：(ISHIHARA , takashi)
所属研究機関名：岡山大学
部局名：環境生命科学研究科
職名：教授
研究者番号（8 桁）：10262495