様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２８ 年　 ６ 月　 ６ 日現在

機関番号：３２６６０
研究種目：挑戦的萌芽研究
研究期間：2014～2015
課題番号：２６５４０００８

研究課題名（和文）複合待ち行列システムにおける柔軟性効果の数理的解明

研究課題名（英文）Mathematical study on the effect of flexibility in complex queueing systems

研究代表者
宮沢　政清（Miyazawa, Masakiyo）

東京理科大学・理工学部・教授

研究者番号：８０１１０９４８

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　2,700,000円

研究成果の概要（和文）：複合待ち行列の柔軟性を大きな待ち行列の漸近特性を用いて数理的解明するための新しい方法を研究した．この方法は区分的に確定的なマルコフ過程の指数型テスト関数によるマルチンゲール分解を使う．当初計画したランダムウォークによる方法と異なり，到着間隔やサービス時間が一般の分布の場合にも適用可能な方法である．この方法を使って各種の待ち行列やそのネットワークの定常分布の漸近特性や重負荷時における極限分布を導いた．この結果を用いて，複数種類の客が窓口で競合する待ち行列ネットワークおけるサービス優先権の効果と並列型待ち行列において最小待ち行列を選ぶことができる客の効果と限界を解明した．

研究成果の概要（英文）：We study a new method for mathematical study on the effect of flexibility in complex queueing systems including networks. This method describes those systems, which may have generally distributed inter-arrival and service times, by a piewise deterministic Markov process, PDMP for short, and uses a martingale decomposition of the PDMP by exponential type of test functions. It differs from our original plan, which uses a reflecting random walk assuming that inter-arrival and service times are exponentially distributed. We apply this method to study the stationary queue length distributions of various systems through their tail asymptotics and their limits in heavy traffic. Those results are used to study flexibility in multiclass queueing networks with static buffer priority service and parallel queues with dedicated and join shortest queue arrivals.

研究分野：待ち行列理論

キーワード：複合待ち行列　柔軟性の効果　定常分布の裾の漸近特性　重負荷近似　マルチンゲール　大偏差値理論　複数種類の客をもつ待ち行列ネットワーク　一般化最小行列選択待ち行列

１．研究開始当初の背景

異なる種類の客が到着し異なるサービスを受けるシステム（複合待ち行列システムと呼ぶ）は，コールセンターなどの顧客サービス，通信ネットワークのトラヒック，生産システムなどの数理モデルとして広く研究されている．これらのシステムでは異なるサービスごとに待ち行列をもつため，空の待ち行列があっても別の所で大きな待ち行列が生じ，システム全体のサービス品質が劣化する．この劣化は客が選択可能な待ち行列の中から最小のものを選択したり，休止中のサーバーが別のサーバーを補助すると改善する．これらの客やサーバーの割合を柔軟性と呼ぶ．一般に柔軟性が増えるにつれサービス品質は向上するが改善の効果は低下すると予想される．しかし，柔軟性があると複数の待ち行列が互いに影響しランダムに変化するため，理論解析が困難である．

関連研究に到着客が最小待ち行列を選ぶモデルやサーバー協力型モデルの漸近解析がある (Foley and McDonald (2001), Miyazawa (2009b))．これらの研究ではポアソン到着と指数分布に従うサービス時間を仮定し，柔軟性を客とサーバーのいずれか一方に限定する．より一般的なモデルに対しては，標本路を使って客の柔軟性について平均待ち時間などの大小関係を調べる定性的な研究に限られている（Akgun, Righter and Wolff (2011, 2012), Tsitsiklis and Xu(2013)）．

２．研究の目的

本研究の目的は，複合待ち行列システムにおける柔軟性の効果と限界を大きな待ち行列の漸近特性を用いて数理的に解明する新しい方法を研究し，その結果を複合待ち行列システムの設計や運用に役立てることである．

３．研究の方法

当初計画した研究方法は，到着間隔やサービス時間が指数分布に従うことを仮定して，反射壁をもつ非負の多次元領域上を動くランダムウォーク（反射型多次元ランダムウォークと呼ぶ）を使って客とサーバーが柔軟性をもつ複合待ち行列システムをモデル化し，その定常分布の漸近特性を調べることであった．反射壁を構成する各境界面は各待ち行列長の大きさの順序を決定するので，柔軟性（客の最小待ち行列選択や空きサーバーの移動）から生じる待ち行列間の相互依存が各境界面上で簡単に表現できるという利点がある．

しかし，高次元の境界面上を状態空間とするランダムウォークの定常分布の裾の減少率を求めることは困難であった．一方，海外の共同研究者から，到着間隔やサービス時間分布の影響を見ることの重要性を指摘された．これまでのランダムウォークによるモデル化を使う場合には，背後状態を追加したマルコフ変調ランダムウォークへ拡張する必要がある．しかし，ノード数が 3 以上のネットワークに対しては，このようなモデル化は複雑で解析が困難であった．そこで，主題を以下の 3 つの項目に分け研究を進めた．

(a) 2 ノードの場合に限り，背後状態を付け加える．この場合の確率過程は，反射壁のあるマルコフ変調 2 次元ランダムウォークとなる．この確率過程の定常分布の漸近特性の研究を行列解析と反射型ランダムウォークの定常方程式の幾何学的解析により行う．

(b) 一般的な待ち行列モデルやそのネットワークを区分的に確定的なマルコフ過程（Piece-wise deterministic Markov process, 略して，PDMP）によりモデル化する．この確率過程の時間展開式は比較的に簡単であるが．到着やサービス完了により起こる状態変化を解析的に表すことが難しく，その定常分布の解析的研究は深く行われてこなかった．本研究では，状態空間から実数への関数であるテスト関数を指数型に限定し，PDMP のテスト関数による時間展開式を連続関数の積分とマルチンゲールに分解する．この分解とその応用方法の研究を行い，定常分布の裾の漸近特性と重負荷時における定常分布の極限を導く．

(c) 以上の結果を使って，複合待ち行列やそのネットワークモデルの柔軟性効果の比較や数量的な評価を行う．

４．研究成果

前節の各項目の研究を進め，以下の成果を得た．

(1) 反射壁のあるマルコフ変調 2 次元ランダムウォークの漸近解析（項目(a)）

この研究は，科研費・基盤研究(B)（課題番号 24310115）の「多次元確率過程の漸近特性と待ち行列ネットワークの安全設計」（平成 24,25,26 年度）の成果の一部を発展させたものである．マルコフ変調ランダムウォークを 2 次元準出生死滅過程(2D-QBD と表す)の推移確率を行列により表し，その右不変ベクトルの特性を調べ，定常分布の漸近特性を導いた．この結果を 2 ノードの一般化ジャクソンネットワーク（このモデルの詳細は項目(4)を参照）に適用し，定常分布の漸近特性得た．これらの成果を論文して発表した（発表論文①）．

この研究結果から，2 ノードの一般化ジャクソンネットワークの定常分布の漸近特性は到着時刻やサービス時間列から作られる計数過程（各時刻までに起こった数）の大偏差値理論における率関数によって得られる

ことが分かった．これより到着間隔やサービス時間の分布の混雑に与える影響を解析的な式を通して見ることができる．3 ノード以上をもつ一般化ジャクソンネットワークや複合待ち行列についても同様な結果が予想され，柔軟性効果の研究を進める上で大変役立った．

(2) 時間展開式のマルチンゲール分解についての基礎研究

項目(b)について，最初は簡単な窓口一つの先着順待ち行列を区分的に確定的なマルコフ過程（略して，PDMP）により表し，その定常分布の重負荷近似を簡単な解析式として表す研究から始めた．ここに，重負荷近似とは，モデルを表す確率過程の状態や時間の尺度を変えて大きな混雑を作り，確率過程やその定常分布の極限（正確には弱収束極限）を取る．この場合の極限過程は拡散過程となるので，拡散近似とも呼ばれる．本研究では，応用に役立てるために，確率過程の極限ではなく，その定常分布の極限を直接求める方法を研究した．

PDMP の研究は M.H.A. Davis (1976) により始められ，テスト関数を使って離散的な状態変化を境界条件として分離する方法が得られていた．しかし，Davis の研究目的は定常分布を求めるために定常方程式を導くことであり，テスト関数を具体的に求めていない．このため，境界条件をもつ定常方程式の段階で止まっていて，PDMP の漸近解析についての理論研究はほとんど行われて来なかった．

以上の経緯から，PDMP について再検討を行った．その結果，定常分布を完全に求めるのではなく，必要な情報が得られるような方程式を求めることに問題を限定した．このために，解析的に扱いやすい指数関数型のテスト関数を用いた．このテスト関数を PDMP の時間展開式に適用し，テスト関数のパラメータを適切に選んで，解析的に最も難しい離散的状態変化を表す項をマルチンゲールにより置き換える．このとき，時間展開式は，PDMP の連続的な変化を表す積分の項と離散的変化の項で消去されずに残ったマルチンゲールの和として表すことができる．すなわち，セミマルチンゲール表現が得られる．

指数型テスト関数のパラメータを決める際に，到着時間間隔やサービス時間の分布の積率母関数の逆関数を使う．このとき，大きな問題は，これらの分布が重い裾（裾確率が指数的より遅く減少する）をもつ場合にはパラメータが正であるとき，積率母関数が発散し，逆関数が定義できないことである．この問題点を，対応する確率変数を定数で打ち切った分布に対して，逆関数を求めてから，定数を無限大にした極限を求め，パラメータを決めた．このような打ち切り法は標準的な考え方である．しかし，その数学的な確認は個別に行う必要があり，本問題のパラメータの設定の際に有効であることを確認した．この結果は，以下の(3)の研究と共に論文として発表した（発表論文②）．

(3) マルチンゲール分解の複数窓口待ち行列の定常分布の漸近解析への応用

項目(b)の研究を深めるために，待ち行列が 1 つであるが異なるサービス時間分布をもつ先着順サービス複数窓口モデルに対して，(2) の結果を適用し，待ち行列長の定常分布について裾の減少率と重負荷近似を求めた．

定常分布の裾の減少率については，到着時刻での系内仕事量（残りサービス時間の和），待ち時間，待ち人数などについて，位相型の分布を仮定した研究が行われてきた（Neuts and Takahashi (1981)など）．また，同じ量に対して，一般の分布を仮定した研究（，Sadowsky and Szpankowski (1995)）もあるが，従来の研究では，結果の解析表現が複雑であり，非線形方程式を解かないと結果が得られないなど，応用に使うことが困難であった．

本研究では，任意時刻における待ち行列長の定常分布に対して，裾の減少率を(2)で求めた到着間隔やサービス時間分布から決まる率関数を使って求めた．この場合には，PDMP の分解から得られるマルチンゲールによる測度変換が役立った．この結果から，サービス時間分布が重い裾をもつ窓口は，定常分布の裾の減少率に全く寄与しないことを確認した．

定常分布の重負荷近似に対しては，窓口の利用率をρとするとき，待ち行列長 L を (1-ρ)L と尺度変換し，ρを 1 に近づけたときの分布の極限を求めることが標準的な方法である．本研究ではこの方法の他に，分散を無限に大きくする場合の極限分布も求めた．なお，定常分布の重負荷極限を直接求める研究が Kingman (1962) や Kollerstrom (1974) により行われたが，本研究のモデルに対する研究はこれまでなかった．

これらの応用により，(2)の方法の有効性を確認できた，複数窓口におけるサービス時間分布の効果を解析的に現すことができた．

(4) 一般化ジャクソンネットワークの定常分布の漸近特性．

一般化ジャクソンネットワークは，待ち行列をノードとするネットワークであり，各ノードは 1 つのサービス窓口をもち，先着順にサービスを行う．サービス時間列は，各窓口ごとに独立で同一の分布に従い，他の事象とは独立である．サービスを完了した客は与え

られた確率（これを経路選択確率と呼ぶ）に従い次のサービスノードを選ぶか外部に退去する．外部からの到着がある窓口には，他の事象と独立な再生過程（間隔が独立で同一の分布に従う計数過程）に従って客が到着する．

一般化ジャクソンネットワークのノード数を d とし，各ノードに 1,2,..,d までの番号を付ける．各ノードへの外部からの到着率と経路選択確率から，各ノードへの総到着率を計算することができる．ノード i の総到着率をノード i のサービス率で割ったものを利用率と呼び ρ_i により表す．すべての i に対して，$\rho_i < 1$ ならば，　各ノードの待ち人数を要素とする待ち行列ベクトルの定常分布が存在し，安定であるという．

安定な一般化ジャクソンネットワークにおいて，各ノードの待ち人数の結合定常分布の裾の減少率を求めることが本項目の目的である．項目(1)では，　ノード数が 2 つ，すなわち，d=2 の場合に，到着間隔とサービス時間分布がすべて有限個の背後状態で表現できる位相型分布であることを仮定して，この減少率を求めた．

本研究項目では一般の d と一般の分布に対して，減少率を求めることが目的である．このために，(2)で得られたマルチンゲールを利用した．このマルチンゲールから指数型のマルチンゲールを作り，確率測度の変換に利用した．この方法は大偏差値理論でよく行われる方法である．本研究の特色は，テスト関数に残余到着時間と残余サービス時間の打ち切り関数を埋め込み，マルチンゲールが使える範囲を拡げたことである．

この方法を使って，待ち人数の結合定常分布の裾確率の漸近的な上限と下限を求めた．この結果は 2016 年 6 月にハンガリーのブタペストで開催予定の国際研究集会 MAM9 で発表予定である．また，これらの結果から定常分布の裾の減少率を求める研究を進めている．

(5) 一般化ジャクソンネットワークの重負荷近似への応用．

安定な一般化ジャクソンネットワークに番号 1,2,... を付けたモデルの列に対して，極限モデルを求め近似モデルとして使う方法がある．この極限操作の条件として，各ノードの利用率を 1 に近づける条件を重負荷条件と呼ぶ．このとき，各ノードにおいて，外部からの客の到着間隔と各客のサービス時間の平均と分散はそれぞれ一定の値に近づくとする．

重負荷条件の下で，ノードの待ち行列長と時間を尺度変換すると結合待ち人数過程は反射壁をもつ d 次元非負値ベクトル空間上のブラウン運動に弱収束することが知られている．この極限過程をセミマルチンゲール反射ブラウン運動と呼び，SRBM（Semi-martingale reflecting Brownian motion）と略称する．

SRBM はネットワーク待ち行列の重負荷における拡散近似のための確率過程として広く使われてきた．しかし，応用上重要な定常分布に関しては，確率過程の極限だけでは不十分であり，通常，タイト性と呼ばれる条件の証明が必要である．一般化ジャクソンネットワークの重負荷極限における，定常分布のタイト性は，比較的最近証明されている（Gamarnik and Zeevi(2006), Budhiraja and Lee(2009)）．

本研究では，重負荷において，一般化ジャクソンネットワークの定常分布が SRBM の定常分布へ弱収束することを，(2)で研究した PDMP と指数型テスト関数を使う方法により証明した．この方法は定常分布を決定する定常方程式を直接導き極限分を求める．これは，従来の確率過程の極限に基づく方法とは大きく異なる．従来の研究では困難であったより複雑なネットワークにおける定常分布の重負荷極限にも適用可能であり，新たな理論展開が期待される（下記の項目(5)と(6)参照）．

本研究は米国・Cornell 大学の Anton Braverman, Jim Dai との共同研究であり，論文（http://arxiv.org/abs/1510.01249 で参照可能）を投稿中である．

(6) 複数の種類の客が窓口で競合する待ち行列ネットワークの重負荷近似

一般化ジャクソンネットワークと同様なネットワークモデルにおいて複数の異なる種類の客があり，各ノードにおいて客の種類ごとに待ち行列を作り，決められた優先順位に従って客の種類ごとに先着順でサービスを受けるモデルを優先サービス待ち行列ネットワークと呼ぶ．なお，各ノードでの外部からの到着間隔の分布とサービス時間分布は客の種類ごとに決められている．

このネットワークモデルは，通信ネットワークや生産システムなどに広く適用でき，応用性が高い．しかし，一般化ジャクソンネットワークより複雑であり，安定条件がわからないモデルもある．

本研究の目的は，安定条件を仮定し，結合待ち人数の定常分布の重負荷極限を求めることと，その柔軟性効果への応用である．

優先サービス待ち行列ネットワークの重負荷近似においては，優先権の高い客は待ち行列を作らない現象が起こり，状態空間の崩壊と呼ばれる．このため，待ち行列の結合定

常分布の極限は，各ノードの優先権が最も低い客の待ち行列により決まる．この状態の崩壊は，確率過程の重負荷極限に対して証明されているが，定常分布に対しては，非常に困難であることが知られている．

本研究では，(5)と同様に定常方程式の極限を求める方法を使って，この問題に挑戦した．現在までの所，問題を完全に解決するに至っていないが，優先権の高い客の待ち行列を無視できる所までは証明できた．そこから，優先権が最も低い客の定常方程式を導く方法はできているが，そのために必要な条件が簡単な場合を除いて確認できていない．

本研究は米国・Cornell 大学の Anton Braverman, Jim Dai との共同研究であり，現在研究を続行中である．

(7) 複数種類の客が窓口で競合する待ち行列ネットワークおけるサービス優先権の効果

(6)のネットワークモデルの特別な場合として，2 ノードで，各ノードに外部から異なる種類の客が到着し，サービス終了後別のノードへ行き，そこでのサービス終了後退去するモデルを考える．このモデルに対して，(6)の結果を用いて，各ノードでの優先権の設定が，システム全体の混雑に及ぼす影響を重負荷近似を用いて調べた．

このモデルの安定性条件は既知であり，各ノードで，外部から到着した客に優先権を与える方が，安定であるパラメータの範囲が広いことが知られている．本研究結果から，安定条件が満たされるならば，外部ではなく他のノードから到着した客のサービスを優先する方が，混雑が少ない（大きな待ち行列が発生する確率が小さい）ことがわかった．安定条件と相反する結果であり，興味深い．

本研究は米国・Cornell 大学の Anton Braverman, Jim Dai との共同研究であり，研究成果 2016 年 4 月に開催された OR 学会の待ち行列研究部会で発表した．また，7 月にフランスのトゥールーズで開催される第 2 回ヨーロッパ待ち行列研究集会でも発表予定である．

(8) 並列待ち行列における柔軟性の効果

d 本の待ち行列があり，それぞれ先着順に待ち行列ごとに与えられたサービス時間分布に従い客を 1 人ずつサービスする．客の到着には，各待ち行列ごとに到着する専属到着と，最小の待ち行列に到着する柔軟到着があり，合計 d+1 種類の到着がある．これらの到着過程は独立で，それぞれ，再生過程に従うとする．これらの再生過程の到着時間分布は異なってもよい．このモデルを一般化された最小待ち行列選択到着モデルと呼ぶ．

このモデルは柔軟性のある複合待ち行列であり，本研究の対象とする主要モデルの 1 つである．このモデルの柔軟性の効果を量るために，最初は定常分布の減少率を比較することを考えたが，すべてが指数分布に従うときでさえ難しい問題であった．そこで，問題を重負荷時における定常分布の比較に変更した．しかし，この待ち行列モデルでは，到着時に各待ち行列の大小関係に依存して状態（各待ち行列を要素とするベクトル）が変わるため，項目(6),(7)の重負荷近似で用いた方法をそのまま使うことができない．

そこで本研究では，到着時における状態変化が複雑な場合をうまく避けるようなテスト関数を導入した．これにより(2)と同様な PDMP のセミマルチンゲール表現が得られる．この結果を使って，待ち行列長の結合定常分布の重負荷時における極限を求めた．この極限分布から，どのような条件の下でどの待ち行列のグループが同じような長さになるか（すなわちバランスするか）を調べることができる．$d=2$ の場合には完全な答えを得ることができたが，$d\geq 3$ の場合は研究中である．

(9) まとめ

本研究により，複合待ち行列の柔軟性効果と限界を大きな待ち行列の漸近特性を用いて数理的解明するための新しい方法の有効性を示すことができた（項目(2),(3),(5)）．当初の研究計画とは異なり，到着間隔やサービス時間の分布が一般である場合に対応できる．また，定常分布の裾の漸近特性だけでなく重負荷近似にも適用できる点が優れている．項目(6),(7),(8)ではこの方法を柔軟性効果の解明のために用いた．この部分については研究が完成していない所があり，今後更に研究を進めることを計画している．

最後に，助成金により本研究を進めることができたことに深く感謝いたします．

5．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 3 件）

① M. Miyazawa, A unified approach for large queue asymptotics in a heterogeneous multiserver queue, Advances in Applied Probability, 査読有り, Vol. 49, 2017, 印刷中.
http://arxiv.org/abs/1510.01034

② M. Miyazawa, Martingale decomposition for large queue asymptotics, 第 32 回待ち行列シンポジウム予稿集, 査読なし, 2016, 199-208.

③ M. Miyazawa, A superharmonic vector for a nonnegative matrix with QBD block structure and its application to a Markov modulated two dimensional reflecting process, Queueing Systems, 査読有り, Vol. 81, 2015, 1-48.
DOI: 10.1007/s11134-015-9454-x

〔学会発表〕（計 4 件）

① 宮沢政清, 待ち行列の尺度変換による近似モデル：分類と展望, 日本オペレーションズリサーチ学会春季研究発表会, 2016 年 3 月 18 日, 慶應義塾大学理工学部, 神奈川県横浜市

② 宮沢政清, Martingale decomposition for large queue asymptotics, 第 32 回待ち行列シンポジウム「確率モデルとその応用」, 2016 年 1 月 23 日, 多摩永山情報教育センター, 東京都多摩市

③ M. Miyazawa, A unified approach for a large queue in a heterogeneous multi-server system, The 18th INFORMS Applied Probability Conference（国際学会）, 2015 年 7 月 8 日, Koc University in Istanbul, トルコ

④ M. Miyazawa, Revisit large queues in a heterogeneous multi-server queue using a piecewise deterministic Markov process and a harmonic function, The fourth Australia New Zealand Applied Probability Workshop（国際学会）, 2015 年 4 月 9 日, Barossa, オーストラリア

〔図書〕（計 0 件）

〔産業財産権〕
○出願状況（計 0 件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

○取得状況（計 0 件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等
http://www.rs.tus.ac.jp/miyazawa/

６．研究組織

(1)研究代表者
宮沢　政清　（MIYAZAWA, Masakiyo）
東京理科大学・理工学部・教授
研究者番号：80110948

(2)研究分担者
なし　（　）

研究者番号：

(3)連携研究者
なし　（　）

研究者番号：