

平成 30 年 6 月 15 日現在

機関番号：34316

研究種目：挑戦的萌芽研究

研究期間：2014～2017

課題番号：26600156

研究課題名(和文) 束(Lattice)の代数的構造を用いたセルオートマトンの統一的理論の構築

研究課題名(英文) Construction of a unified theory for cellular automata using algebraic structure of lattice

研究代表者

松木平 淳太 (Matsukidaira, Junta)

龍谷大学・理工学部・教授

研究者番号：60231594

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,900,000円

研究成果の概要(和文)：Max-Min-Plus 表現に加えてmod 2 演算を導入することにより、2次の保存量を持つエレメンタリーセルオートマトン (ECA)、ルール142、ルール14を方程式として表現することに成功した。また、この方程式を利用して、基本図における相転移を数学的に厳密に示すことに成功した。さらにこれらのルールに確率変数を導入したモデルの基本図における保存量の密度と流量の間の解析的な関係式を導くことができた。5近傍粒子セルオートマトンを統一する確率モデルや3近傍3値粒子セルオートマトンの漸近挙動解析に関する成果も挙げた。これらの結果は統一的理論の構築に今後大きく貢献すると期待される。

研究成果の概要(英文)：Adding the mod 2 operation to Max-Min-Plus expression, we have succeeded expressing rule 142 and 14 that have second order conserved quantities as equations. And using the equations, we have succeeded showing the phase transition of the fundamental diagram mathematically. Furthermore, we have succeeded obtaining an analytic relation for the density of the conserved quantity and flux for the models stochastic variables are introduced. We have also obtained the results for the stochastic model unifying five-neighborhood particle cellular automata and asymptotic behavior analysis for three-neighborhood three-valued cellular automata. It is expected that all these results will contribute to construction of the unified theory.

研究分野：応用数理

キーワード：セルオートマトン 超離散 Max-Min-Plus 表現 保存量

1. 研究開始当初の背景

我々は「超離散化法」と呼ばれる独創的な手法を発展させ、ソリトンセルオートマトンを含む超離散可積分系の代数的構造を明らかにしてきた。我々の研究から国内外の多くの研究が生まれ、ultra-discretization という用語が定着するに到っている。この手法は可積分系の分野において非常に成功をおさめ、現在でも多くの研究が行われている。一方、可解カオス系への適用など、可積分系以外にこの手法を拡張しようという試みが行われているが、成果はまだ限定的であると言わざるを得ない。そういった状況の中、粒子セルオートマトン (Particle CA) やエレメンタリーセルオートマトン (ECA) において、束 (Lattice) と呼ばれる代数的な構造が非常に重要な役割を果たしていることを、最近我々は発見した。発展方程式と時刻 $n \rightarrow \infty$ における解の漸近形を、束 (Lattice) を用いて表すことができ、進行波や振動現象といったパターンの解析が可能になる。しかしながら、束 (Lattice) の構造が一般のセルオートマトンに適用できるかどうかについて、まだ不明な点は多い。さらに、束 (Lattice) 自体、セルオートマトンの解への応用という観点では研究が行われてきておらず、新たな研究分野の萌芽となり得る可能性を持っている。そこで本研究では、束 (Lattice) の代数的な構造の基礎の上に、より広いクラスのセルオートマトンを統一的に扱う一般的な理論を確立することをテーマとする。

2. 研究の目的

我々は「超離散化法」と呼ばれる独創的な手法を発展させ、ソリトンセルオートマトンを含む超離散可積分系の代数的構造を明らかにしてきた。一方、我々は、束 (Lattice) と呼ばれる代数的な構造が、セルオートマトンの漸近挙動において非常に重要な役割を果たしていることを最近発見した。これは今までに無い全く新しい視点であり、Max-Plus 代数に基づく「超離散化法」をより一般的な枠組みに大きく拡張できる可能性を示唆している。セルオートマトンの解を束 (Lattice) における代数的恒等式に帰着するという新たな着想を出発点にして、より広いクラスのセルオートマトンを統一的に扱うことのできる一般的な理論を構築することを本研究の目的とする。

3. 研究の方法

束 (Lattice) の代数的な構造の基礎の上に、より広いクラスのセルオートマトンを統一的に扱う一般的な理論を構築するために、我々は以下の3つのテーマを設定し、研究を遂行した。

(1) 4近傍粒子セルオートマトン (Particle

CA) およびエレメンタリーセルオートマトン (ECA) の束 (Lattice) による解の漸近形の表現を一般の近傍数のセルオートマトンに拡張する。

(2) 束 (Lattice) による解の漸近形の表現を統一的に扱う束 (Lattice) の代数的恒等式を探索する。

(3) Particle CA に確率を導入した確率粒子セルオートマトン (SPCA) の研究を行い、そのヒエラルキーの構造を明らかにする。

そして、これらのテーマから得られた成果をもとに、

- 束によるセルオートマトンの代数的構造と既存の解析学を対応づける理論の構築

を試みることにした。

4. 研究成果

我々は、粒子数を保存量として持つ1次元セルオートマトンにおいて Max-Min-Plus 表現が重要な役割を果たすことを既に発見していたが、粒子数以外の高次の保存量を持つ1次元セルオートマトンにおいて、Max-Min-Plus 表現が適用可能かどうかは不明であった。そこで、2次の保存量を持つ(10の数を保存する)エレメンタリーセルオートマトン (ECA)、ルール12, 14, 15, 34, 35, 42, 43, 51, 140, 142, 170, 204に注目した。そして、このうち、ルール142(あるいは同値なルールとして212)に関して、Max-Min-Plus 表現に加えて mod 2 演算を導入することにより、方程式として表現が可能であることを発見した。さらに、この方程式の表現を用いることにより、基本図における相転移を数学的に厳密に示すことにも成功した。さらにルール14(同値なルールとして84)に対しても、Max-Min-Plus 表現と mod 2 演算で方程式としての表現が可能であり、基本図を厳密に示すことにも成功した。

前記の研究成果はテーマ(1)に沿ったものであるが、束 (Lattice) に mod 2 演算による拡張が可能であることを示しており、当初の研究計画の想定範囲を越えたところでの結果が得られることとなった。束 (Lattice) を用いた統一的な理論の構築に向けては、こういった事実の発見がまだ必要であると予想され、今回の研究成果は、統一的な理論構築に必要な不可欠なものになる可能性があると思われ、我々は考えている。

我々はさらに、上記の結果をテーマ(3)の観点から発展させることも試みた。具体的にはルール142(同値なルール212)、ルール14(同値なルール84)に対して確率変数を導入することによって確率セルオートマトンを構築し、数値シミュレーションによって基本図を

作成した。得られた基本図は ASEP (Asymmetric simple exclusion process) において見られるような保存量の密度と流量の間の解析的な関係式の存在を示唆するものであったため、我々は解析的なアプローチを試みた。その結果、完全に解析的な証明ではないが、数値シミュレーションによって示唆される 2-クラスター近似の関係式を仮定すれば、厳密に解析的な関係式を導くことができ、それが数値シミュレーションと高い精度で一致することを示すことができた。先行研究においては、粒子数等の 1 次の保存量を持つセルオートマトンの確率化に関する成果は多く存在するが、高次保存量を持つセルオートマトンの確率化に関する成果は、おそらく我々のものが初めてである。確率化が個々のルールを橋渡しするキーであると我々は考えており、それが統一的な理論で大きな役割を果たすと期待している。そういった意味で、今回の成果は大きな第一歩である。

テーマ(3)に沿った研究も同時並行で進めた。4 近傍粒子セルオートマトン (Particle CA)における Max-Min-Plus 表現に関しては、既に我々は結果を得ている。また、その確率化に関しては、複数の確率変数を導入し、基本図における解析的な関係式を得ることに成功している。しかしながら、統一的な一般論はまだ見えていない状態であったため、さらに近傍数の多い 5 近傍粒子セルオートマトンの確率化を目指した。まず、我々が既に研究結果として得ている 5 近傍粒子セルオートマトンの Max-Min-Plus 表現と基本図との対応関係を用い、異なるルール同士の基本図の関係を Max-Min-Plus 表現間の関係と対応づけ、それによって確率変数を導入するという方針で研究を進めた。具体的には Max-Min-Plus 表現 が判明している 19 のルールを 11 個の確率変数を含む一つの Max-Min-Plus 表現で統一的に表すことに成功した。この結果は、確率変数を導入することによって、多くのルールを統一的に扱うことができる可能性を示す結果であり、統一的理論構築に向けての大きな指針となると思われる。

研究計画においては当初予定していなかったが、研究過程において、多値セルオートマトンの重要性に気づき、3 近傍 3 値粒子セルオートマトンについても精力的に研究を行った。その結果、48 個のルールのうち、15 個のルールについては Max-Min-Plus 表現を得ることができた。そして、それらのうち 8 個のルールに関して、漸近挙動解析を得ることに成功した。また、3 近傍 3 値ルールと 5 近傍 2 値ルールのあるクラスが変数変換によって互いに変換可能であることも発見し、統一的に理論においては、異なる近傍数を持ったセルオートマトン同士も統一的に扱える可能性があることを示唆する結果が得られた。

テーマ(1),(3)の方向性として、2 次以上の保存量を持つセルオートマトンの探索、複数の保存量を持つセルオートマトンの探索なども行い、いずれの場合にも基本図に特徴的なパターンが表れることを確認している。

以上のように、テーマ(1),(3)に関して非常に多様な研究成果が得られ、これらは統一的な理論へ向けての材料となり得るものである。そういった意味で本研究は目標へ向けて大きな前進となる成果を上げた。一方、その多様性と拡がりゆえに、統一的理論構築そのものは、テーマ(2)に沿った束(Lattice)の代数的恒等式に帰着されるであろうという見通しは楽観的である可能性もあり、次期研究計画においては、方向性を再構築する必要があると思われる。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 1 件)

On fundamental diagram of stochastic cellular automata with a quadratic conserved quantity, Endo Kazushige, Takahashi Daisuke, Matsukidaira Junta, IEICE NONLINEAR THEORY AND ITS APPLICATIONS, 査読有, 7(3) 313-323 2016 年
DOI:10.1587/nolta.7.313

[学会発表](計 12 件)

樽角政樹, 松木平淳太, Max-Min-Plus 表示を用いた多値粒子セルオートマトンの漸近挙動解析, 日本応用数理学会研究部連合発表会, 2015

樽角政樹, 松木平淳太, 多値粒子セルオートマトンの Max-Min-Plus 表示, MIMS 共同研究集会「可積分系が拓く現象数理モデル」, 2015

樽角政樹, 松木平淳太, 多値粒子セルオートマトンの Max-Min-Plus 表示, 日本応用数理学会 2015 年度年会, 2015

松木平 淳太, 保存量を持つ 1 次元セルオートマトンの Max-Min-Plus 解析, セルオートマトンが拓く現象数理学会, 2014

松木平 淳太, 保存量を持つ 1 次元セルオートマトンの Max-Min-Plus 解析, 生命ダイナミクスの数理とその応用: 異分野とのさらなる融合, 2014

津川 未希, 松木平 淳太, 高橋 大輔, Max-Min-Plus 表現を用いた 5 近傍粒子 CA の確率化について, 平成 26 年度九州大学応用力学研究所共同利用研究集会「非線形波動 研究の現状 - 課題と展望を語る -」, 2014

延東和茂, 高橋大輔, 松木平淳太, 高次保存量をもつ CA の確率化について, 日

本応用数理学会 2014 年度年会, 2014
松木平 淳太、高橋 大輔, 高次保存量をもつ CA の Max-Min-Plus 解析について, 日本応用数理学会 2014 年度年会, 2014
津川 未希, 松木平 淳太, Max-Min-Plus 表現を用いた 5 近傍粒子 CA の確率化について, 日本応用数理学会 2014 年度年会, 2014

Matsukidaira Junta and Takahashi Daisuke, Max-min-plus expressions for one-dimensional cellular automata with second order conserved quantity, SIAM Conference on Nonlinear Waves and Coherent Structures, 2014

松木平 淳太, 粒子セルオートマトンの Max-Plus 代数による解析, 非線形数理モデルの諸相:連続, 離散, 超離散, その先, 2014

Matsukidaira Junta, Takahashi Daisuke, Max-min-plus expressions for one-dimensional cellular automata with second order conserved quantities, AUTOMATA2014, 2014

6. 研究組織

(1) 研究代表者

松木平 淳太 (Matsukidaira, Junta)

龍谷大学・理工学部・教授

研究者番号: 60231594

(2) 研究分担者

高橋 大輔 (Takahashi, Daisuke)

早稲田大学・理工学術院・教授

研究者番号: 50188025