

**科学研究費助成事業 研究成果報告書**

平成 29 年 6 月 8 日現在

機関番号：12601

研究種目：挑戦的萌芽研究

研究期間：2014～2016

課題番号：26610003

研究課題名(和文)p進 Langlands 対応と志村多様体の p 進幾何

研究課題名(英文)p-adic Langlands correspondence and p-adic geometry of Shimura varieties

研究代表者

今井 直毅 (Imai, Naoki)

東京大学・大学院数理科学研究科・准教授

研究者番号：90597775

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,800,000円

研究成果の概要(和文)：志村多様体の p 進幾何について研究した。特に p 進体上の志村多様体に対し、potentially good reduction locus というモチーフが退化していない adic 空間としての開部分空間の概念を導入し、そのコホモロジーについて調べた。また、局所体上の楕円曲線のイプシロン因子を楕円曲線の有理点で記述する Kramer-Tunnel の予想についても研究した。Kramer-Tunnel の予想は、局所体の標数が 2 の場合が未解決であったが、この場合の予想を混標数の局所体の場合に帰着することによって証明した。

研究成果の概要(英文)：We studied p-adic geometry of Shimura varieties. In particular, we construct potentially good reduction locus, where motives don't degenerate, as an open subspace of the adic space associated to a Shimura variety over p-adic field. Further, we studied its cohomology. We studied also on the Kramer-Tunnel conjecture, which describe the epsilon factor of an elliptic curve over a local field by rational points of the elliptic curve. The conjecture was open in the characteristic two case. We showed the conjecture by reducing it to the characteristic zero case.

研究分野：数論

キーワード：志村多様体

## 1. 研究開始当初の背景

近年 Breuil, Colmez をはじめとする研究者たちによって  $GL_2(Q_p)$  に対する  $p$  進局所 Langlands 対応が構成された。また、 $p$  進局所 Langlands 対応が、モジュラー曲線の完備コホモロジーに実現されることが Emerton によって証明された。しかし、 $p$  進局所 Langlands 対応と志村多様体の  $p$  進幾何の間の関係はよくわかっていない状態であった。

## 2. 研究の目的

志村多様体の  $p$  進幾何について調べ、志村多様体の  $p$  進幾何と Langlands 対応の関係を明らかにすることが目的である。

さらに、志村多様体の  $p$  進幾何と関連して、局所体上の Abel 多様体やその Tate 加群についても調べる。

## 3. 研究の方法

志村多様体の  $p$  進幾何を rigid 解析空間の手法を用いて研究する。それによって志村多様体のコホモロジーを調べ、Langlands 対応との関係について調べる。また表現論的な手法も用いる。

## 4. 研究成果

志村多様体の  $p$  進幾何について研究した。特に  $p$  進体上の志村多様体に対し、potentially good reduction locus というモチーフが退化していない adic 空間としての開部分空間の概念を導入した。さらに preabelian 型志村多様体に対して、モチーフの退化にともなう stratification を adic 空間の stratification として構成し、potentially good reduction locus のコホモロジーが、志村多様体のコホモロジーと、non-cuspidal な部分を除いて同型であることを証明し、論文を完成させた。構成した stratification は以前得られていたものより自然なものであり、トロイダルコンパクト化の理論との関係がより一層明らかになった。また証明は analytic な空間に関する議論がほとんどであり、志村多様体の整モデルやコンパクト化に関する結果としては Siegel モジュラー多様体に対する結果のみを使った。

$p$  進 Langlands 対応とモジュラー曲線の完備コホモロジーの間の関係や、Fontaine-Mazur 予想への応用および  $p$  進局所 Langlands 対応と局所 Langlands 対応の整合性に関する Emerton の結果に関する理解を深め、概説論文「完備コホモロジーと  $p$  進局所 Langlands 対応」を執筆した。

この論文は、数理解析研究所講究録別冊に出版された。

さらに、 $\text{mod } p$  局所 Langlands 対応および  $p$  進局所 Langlands 対応に関する理解を深め、韓国の Korea Institute for Advanced Study において、The  $p$ -adic and  $\text{mod } p$  local Langlands correspondence for  $GL(2, Q_p)$  という講演を行った。講演の準備において、 $\text{mod } p$  表現に関する知見をとくに深めることができた。

また、志村多様体の  $p$  進幾何と関連して、局所体上の楕円曲線についても調べた。具体的には、局所体上の楕円曲線のイプシロン因子を楕円曲線の有理点で記述する Kramer-Tunnel の予想について研究した。Kramer-Tunnel の予想は、局所体の標数が 2 の場合が未解決であったが、この場合の予想を混標数の局所体の場合に帰着することによって証明した。また等標数の局所体上の楕円曲線のいくつかの幾何学的不変量と混標数の局所体上の楕円曲線の不変量の間の関係も明らかにした。

## 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

(雑誌論文)(計 8 件)

Naoki Imai and Takahiro Tsushima, Local Jacquet-Langlands correspondences for simple supercuspidal representations, to appear in Kyoto J. Math.

Naoki Imai and Takahiro Tsushima, Affinoids in Lubin-Tate surfaces with exponential full level two, to appear in Around Langlands Correspondences, Contemp. Math.

Naoki Imai and Takahiro Tsushima, Stable models of Lubin-Tate curves with level three, Nagoya Math. J. 225 (2017), 100-151.

Naoki Imai and Kęstutis Česnavičius, The remaining cases of the Kramer-Tunnell conjecture, Compos. Math. 152 (2016), no. 11, 2255-2268.

Naoki Imai, Local root numbers of elliptic curves over dyadic fields, Kodaira centennial issue of J. Math. Sci. Univ. Tokyo 22 (2015), 247-260.

Naoki Imai and Takahiro Tsushima, Cohomology of rigid curves with

semi-stable coverings, Asian J. Math. 19 (2015), no. 4, 637-650.

今井 直毅, 完備コホモロジーと  $p$  進局所 Langlands 対応, RIMS Kokyuroku Bessatsu B53 (2015), 423-442.

Naoki Imai and Takahiro Tsushima, Explicit construction of semi-stable models of Lubin-Tate curves with low level, RIMS Kokyuroku Bessatsu B51 (2014), 15-31.

〔学会発表〕(計 15 件)

今井 直毅, 局所 Langlands 対応の幾何化に関する Fargues の予想, 談話会, 京都大学数学教室, 2017 年 1 月 18 日.

今井 直毅, Hecke スタックの非半安定部分と Fargues の予想, 整数論&保型形式セミナー, 大阪大学, 2016 年 12 月 16 日.

Naoki Imai, Deligne-Lusztig construction for a pair of forms, Morningside Seminar on Number Theory, Chinese Academy of Sciences, 2016 年 6 月 8 日.

Naoki Imai, Deligne-Lusztig construction for a pair of forms, MIT Lie Group Seminar, MIT, 2016 年 4 月 13 日.

Naoki Imai, Simple epipelagic local Galois representations, New Developments in Representation Theory, Institute for Mathematical Sciences, National University of Singapore, 2016 年 3 月 14 日.

Naoki Imai, Potentially good reduction loci of Shimura varieties, Boston University Number Theory Seminar, Boston University, 2016 年 2 月 22 日.

Naoki Imai, Affinoids in the Lubin-Tate perfectoid space and simple epipelagic representations, SCMS seminar, 復旦大学, 2015 年 11 月 5 日.

Naoki Imai, Affinoids in the

Lubin-Tate perfectoid space and simple epipelagic representations, Reductions of Shimura Varieties, Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach, 2015 年 8 月 26 日.

今井 直毅, 志村多様体の正準モデルの構成, 第 23 回整数論サマースクール「志村多様体とその応用」, ホテルアップルランド, 2015 年 8 月 18 日.

Naoki Imai, Affinoids in the Lubin-Tate perfectoid space and simple epipelagic representations, Séminaire Groupes Réductifs et Formes Automorphes, Institut de Mathématiques de Jussieu - Paris Rive Gauche, 2015 年 7 月 6 日.

Naoki Imai, Affinoids in the Lubin-Tate perfectoid space and simple epipelagic representations, Arithmetic geometry, representation theory and applications, Centre International de Rencontres Mathématiques, 2015 年 6 月 26 日.

Naoki Imai, Good reduction of affinoids for epipelagic representations in the Lubin-Tate perfectoid space, MIT Number Theory Seminar, MIT, 2015 年 2 月 3 日.

Naoki Imai, The  $p$ -adic and mod  $p$  local Langlands correspondence for  $GL(2, \mathbb{Q}_p)$ , Winter school on  $p$ -adic Hodge theory, Korea Institute for Advanced Study, 2015 年 1 月 12 日, 13 日, 14 日.

Naoki Imai, Good reduction of affinoids for epipelagic representations in the Lubin-Tate perfectoid space, Berkeley Number Theory Seminar, University of California, Berkeley, 2014 年 11 月 19 日.

今井 直毅, 定跡公式, 倉敷整数論集会, 倉敷シーサイドホテル, 2014 年 7 月 27 日.

〔図書〕(計 1 件)

今井 直毅, 第 7 講 整数論 ラングランズ対応に向かって, 数学の現在 i 齋

藤毅・河東泰之・小林俊行編

〔その他〕

ホームページ等

<http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~naoki/>

6．研究組織

(1)研究代表者

今井 直毅 (IMAI Naoki)

東京大学・大学院数理科学研究科・准教授

研究者番号：90597775