

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 28 年 6 月 10 日現在

機関番号：12601

研究種目：挑戦的萌芽研究

研究期間：2014～2015

課題番号：26610004

研究課題名(和文) ムーンシャインに類似する諸現象と頂点作用素代数の研究

研究課題名(英文) Studies on vertex operator algebras and various phenomena similar to moonshine

研究代表者

松尾 厚 (MATSUO, Atsushi)

東京大学・数理(科)学研究科(研究院)・准教授

研究者番号：20238968

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,800,000円

研究成果の概要(和文)：いわゆるムーンシャインと呼ばれる興味深い現象に類似した諸現象が知られているが、それらの現象を統一的に理解する枠組みを構築することに向け、関連するいくつかの研究を行った。そのうち、対称性の高い頂点作用素代数については、最小共形ウェイト1のものを分類する共同研究を実施し、ドリーニュ例外系列と呼ばれる特別な単純リー環の系列が現れることを示した。また、W代数と呼ばれる重要な頂点作用素代数のクラスに関する最近の知見に触発されて、単純リー環の極小巾零軌道についての共同研究を実施し、極小巾零軌道のヒルベルト級数を統一的に表す普遍公式を導き、その系としていわゆる随伴多様体の次数を表す興味深い公式を得た。

研究成果の概要(英文)：In order to understand various phenomena similar to moonshine in a uniform manner, we have considered several problems related to them. Among others, in a joint work with Maruoka and Shimakura on vertex operator algebras having large symmetries, we have classified those with minimal conformal weight one, and obtained that the simple Lie algebras belonging to Deligne exceptional series arise. We have also considered the Hilbert series of minimal nilpotent orbits of simple Lie algebras in a joint work with A.P. Veselov and obtained a universal formula expressing the Hilbert series and the degree of the adjoint variety.

研究分野：無限次元リー環の表現論

キーワード：頂点作用素代数 単純リー環 極小巾零軌道

## 1. 研究開始当初の背景

(1) ムーンシャインと呼ばれる現象は、最大の散在型有限単純群モンスターの表現と楕円モジュラー関数  $J(\tau)$  の関係の発見に端を発し、コンウェイ氏とノートン氏によって予想として定式化された興味深い現象である。

その後、ポーチャーズ氏およびフレンケル氏他によって、ムーンシャイン加群と呼ばれる頂点作用素代数  $V^g$  が構成され、その自己同型群がモンスターと同型になることが証明された。この段階で、コンウェイ・ノートン予想はムーンシャイン加群  $V^g$  へのモンスターの作用に関する予想として再定式化された。その後、ポーチャーズ氏は一般カツ・ムーディー代数の理論をも創始して、モンスター・リー環と呼ばれる無限次元リー環を構成し、関連する大掛かりな研究の末にコンウェイ・ノートン予想の証明を与えた([Bo])。

(2) ムーンシャインに類似した諸現象

ムーンシャインに類似した現象は、モンスター以外の興味深い群についても存在しているのではないかと期待を持つのは自然である。

実際、散在型有限単純群のひとつであるコンウェイ群に関するムーンシャイン現象であるコンウェイ・ムーンシャインについては、頂点作用素超代数を用いた研究がダンカン氏によって行われている。

最近になり、江口徹氏ほかの日本人物理学者のグループによって、マシュー・ムーンシャインと呼ばれる現象が発見された([EOT])。これについては、主に物理学者によって活発に研究が進められている。

さらに最近になって、ダンカン氏は、物理学者との共同研究[CDH]において、マシュー・ムーンシャインを特別な場合として含むアンブラル・ムーンシャインを提唱した。

これは、リーチ格子を除く 23 種類のニーマイヤー格子のそれぞれに応じて、対応する群と  $q$  級数が構成され、それについてムーンシャインの類似が成立するという予想であり、得られた  $q$ -級数はモック・モジュラー形式と呼ばれるモジュラー形式の興味深い一般化になっているというものである。

特に、ニーマイヤー格子のルート系が  $(A_1)^{24}$  型の場合には、マシュー・ムーンシャインとなる。

(3) カイラル・ド・ラーム複体

マシュー・ムーンシャインは、 $K3$  曲面と呼ばれる興味深い複素曲面の楕円種数と呼ばれる位相幾何学的な量と散在型有限単純群であるマシュー群の表現の間に関係があるという現象として見出されたものである。

楕円種数は、理論物理学においては、多様体上の非線型シグマモデルから決まる  $q$  級数として得られるが([Wi])、非線型シグマモデル

は数学的に定式化されておらず、頂点作用素代数の表現論によって構成することはなされていない。

ただし、物理的な洞察によって  $K3$  曲面上の非線型シグマモデルはさまざまな良い性質を持つことが期待されており、楕円種数の具体的な表示が決定されている([EOTY])。

なお、非線型シグマモデルそのものの数学的な研究はなされていないが、それから得られる楕円種数については、さまざまな数学的研究がなされている。また、最近では、カイラル・ド・ラーム複体([MSV])と呼ばれる頂点作用素代数の複体を利用して非線型シグマモデルをとらえようとする研究も行われている([EHKZ])。

## 2. 研究の目的

本研究は、ムーンシャインに類似する現象を頂点作用素代数あるいはその一般化である頂点作用素超代数によって定式化するとともに、頂点作用素代数によるムーンシャインの研究手法を一般化し、ムーンシャインに類似する現象を統一的に理解する枠組みを構築することを目的とする。

具体的には、カイラル・ド・ラーム複体あるいはその類似物を通じて楕円種数を解釈することによってマシュー・ムーンシャインを調べ、その結果をコンウェイ・ムーンシャインやアンブラル・ムーンシャインと比較することによって、ムーンシャインに類似する現象を統一的に理解する枠組みの構築を試みる。

また、ムーンシャイン現象を実現する頂点作用素代数は、とりわけ対称性が高いと予想されることから、対称性の高い頂点作用素代数の持つ特徴を研究することによって、ムーンシャインに類似する現象を統一的に理解する枠組みの構築を試みる。

## 3. 研究の方法

(1) カイラル・ド・ラーム複体の計算

カイラル・ド・ラーム複体を利用した非線型シグマモデルの研究([EHKZ]など)について調査するとともに、具体例について計算を行い、その結果に基づいて、特に  $K3$  曲面上の非線型シグマモデルをカイラル・ド・ラーム複体のコホモロジーの観点から理解することを試みる。具体的には、 $K3$  曲面の楕円種数の数学的取り扱いに基づくマシュー・ムーンシャインの研究([CH]など)について調査を行い、カイラル・ド・ラーム複体との比較を行う。

(2) 対称性の高い頂点作用素代数の研究

モンスター・ムーンシャイン加群は、最小共形ウェイトが 2 の頂点作用素代数の中で、とりわけ大きな対称性を持っている。これに対して、コンウェイ・ムーンシャイン加群は、

最小共形ウェイトが1の頂点作用素超代数となっており、そのようなものの中で、とりわけ高い対称性を持っているのではないかと期待される。

ところで、コンウェイ・ムーンシャイン群は頂点作用素超代数であるが、その偶部分は頂点作用素代数となり、最小共形ウェイトが1である。

そこで、最小共形ウェイトが1の頂点作用素代数で対称性の高いものについて、研究代表者がかつて行った研究[Ma]の手法でその性質を調べ、そのようなものの分類を行う。

#### 4. 研究成果

##### (1) 対称性の高い頂点作用素代数の研究

研究目的の達成に向け、対称性の大きな頂点作用素代数に関する共同研究を行い、最小共形ウェイト1の頂点作用素代数であって、対称性が高いものの分類を得た([MMS])。そこで得られた結果は、いわゆるドリーニュ例外系列と呼ばれる系列([De])に属する単純リー環から作られるアフィン・リー環のレベル1表現に附随する頂点作用素代数となっている。

なお、最小共形ウェイト1の頂点作用素代数で対称性が高いものがそれらに限ることについては、以前より予想していたことでもあり、またチュート氏によって独立に得られているが([Tu])、ここでは十分性についても完全な証明を与えた。

##### (2) リー環の普遍公式の研究

ドリーニュ例外系列については、それに属する単純リー環の次元などの量が双対コクセター数と呼ばれる量の有理式によって統一的に表されるが、その一般化として、すべての単純リー環の次元などを三つのパラメータで統一的に記述する普遍公式が知られている([Vo],[LM])。一方、W代数に関する最近の研究[AM]において、単純リー環の極小巾零軌道が重要な役割を果たしていることが分かったので、急遽、これらに着目して研究を行うこととした。

そこで、英国ラフバラ大学のヴェセロフ氏と共同研究を実施し、論文[GW]などを参考にして、単純リー環の極小巾零軌道のヒルベルト級数を記述する普遍公式を導いた([MV])。その系として、極小巾零軌道の射影化である随伴多様体の次数を与える興味深い公式が得られた。

この研究は、リー環の普遍公式の範囲を大きく広げるといって、今後の研究の出発点となり得る重要性があるものと期待される。

#### <引用文献>

[AM] T. Arakawa, J. Moreau: Joseph ideals and lisse minimal W-algebras. Preprint arXiv:1506.00710.

[Bo] R.E. Borcherds: Monstrous moonshine

and monstrous Lie superalgebras. Invent. Math. 109, (1992).

[CH] T. Creutzig, G. Hohn: Mathieu moonshine and the Geometry of K3 surfaces. Preprint arXiv:1309.2671.

[CDH] M.C.N Cheng, J.F.R. Duncan, J.A. Harvey: Umbral moonshine. Communications in Number Theory and Physics, 8 (2), (2014), 101-242.

[CN] J.H. Conway, S.P. Norton: Monstrous moonshine. Bull. London Math. Soc., 11, (1979), 308-339.

[De] P. Deligne: La serie exceptionnelle de groupes de Lie, C. R. Acad. Sci. Paris Ser. I Math. 322, (1996), 321-326.

[Du] J.F.R. Duncan: Super-moonshine for Conway's largest sporadic group. Duke Math. J. 139, (2007).

[EOT] T. Eguchi, H. Ooguri, Y. Tachikawa: Notes on the K3 surface and the Mathieu group  $M_{24}$ . Exp. Math. 20, (2011).

[EOTY] T. Eguchi, H. Ooguri, A. Taormina, S. K. Yang: Superconformal Algebras and String Compactification on Manifolds with  $SU(N)$  Holonomy. " Nucl. Phys. B 315, (1989), 193-221.

[EHKZ] J. Ekstrand, R. Heluani, J. Kallen, M. Zabzine: Non-linear sigma models via the chiral de Rham complex. Adv. Theor. Math. Phys. 13, (2009), 1221-1254.

[GW] B.H. Gross and N.R. Wallach: On the Hilbert polynomials and Hilbert series of homogeneous projective varieties. In: Arithmetic geometry and automorphic forms, Adv. Lect. Math. (ALM), vol. 19, Int. Press, Somerville, MA, 2011, pp. 253-263.

[LM] J.M. Landsberg, L. Manivel: A universal dimension formula for complex simple Lie algebras. Adv. Math. 201, (2006), 379-407.

[MSV] F. Malikov, V. Schechtman, A. Vaintrob: Chiral de Rham complex. Commun. Math. Phys. 204, (1999)

[MMS] H. Maruoka, A. Matsuo, H. Shimakura: Classification of vertex operator algebras of class  $S^4$  with minimal conformal weight one. Journal of the Mathematical Society of Japan, to appear.

[Ma] A. Matsuo: Norton's trace formulae for the Griess algebra of a vertex operator algebra with larger symmetry. Commun. Math. Phys. 224, (2001), 565-591.

[MV] A. Matsuo, A.P. Veselov: Universal formula for Hilbert series of minimal nilpotent orbits. Preprint arXiv:1602.00350, 2016.

[Tu] M.P. Tuite: Exceptional vertex operator algebras and the Virasoro algebra. In: Vertex operator algebras and related areas, 213-225, Contemp. Math., 497, Amer.

Math. Soc., Providence, RI, 2009.

[Vo] P. Vogel: The universal Lie algebra. Preprint, 1999.

[Wi] E. Witten: Elliptic genera and quantum field theory. Commun. Math. Phys. 109, (1987).

## 5 . 主な発表論文等

〔雑誌論文〕(計1件)

H. Maruoka, A. Matsuo, H. Shimakura, Classification of vertex operator algebras of class  $S^4$  with minimal conformal weight one. Journal of the Mathematical Society of Japan, to appear. (査読あり)

〔学会発表〕(計1件)

Atsushi Matsuo, Classification of vertex operator algebras of class  $S^4$  with minimal conformal weight one. Perspectives from Vertex Algebras. Kyoto University, July, 2015.

## 6 . 研究組織

### (1)研究代表者

松尾 厚 (MATSUO, Atsushi)

東京大学・大学院数理科学研究科・准教授  
研究者番号：20238968

### (2)連携研究者

山内 博 (YAMAUCHI, Hiroshi)

東京女子大学・現代教養学部・准教授  
研究者番号：40452213