2版

様　式　C－１９、F－１９－１、Z－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２９ 年　 ６ 月 ２６ 日現在

機関番号：１４３０１
研究種目：挑戦的萌芽研究
研究期間：2014～2016
課題番号：２６６１０００５
研究課題名（和文）被覆群上の保型表現の内視理論の構築

研究課題名（英文）Theory of endoscopy for an automorphic representation of a covering group

研究代表者
池田　保（Ikeda, Tamotsu）

京都大学・理学研究科・教授

研究者番号：２０２１１７１６

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　2,900,000円

研究成果の概要（和文）：本研究課題ではシンプレクティック群またはメタプレクティック群上の保型形式の典型的な例であるジーゲル・アイゼンシュタイン級数を考察し，そのフーリエ係数の局所因子であるジーゲル級数を深く研究した．とくにジーゲル級数の一般的な関数等式を証明した．また室蘭工業大学の桂田英典氏との共同研究により，局所体上の2次形式のグロス・キーティング不変量の一般的性質を解明し，その結果を用いてジーゲル級数の明示公式を得た．
また，京都大学の山名俊介氏との共同研究によりジーゲル保型形式またはエルミート保型形式のリフティングの理論を保型表現論的な方法により総実代数体上に拡張し、その数値計算例を与えた．

研究成果の概要（英文）：In this research project, we investigated Siegel Eisenstein series defined over a symplectic or a metaplectic group. In particular, we proved the functional equation of a Siegel series. Moreover, by a joint work with Katsurada, we develop a theory of the Gross-Keating invariant of a quadratic form over a non-archimedean local field. As an application, we obtained an explicit formula of a Siegel series.
We also considered the theory of lifting for a symplectic or unitary group defined over a totally real number field. We gave an interesting numerical example for a lifting of Hilbert-Siegel modular forms.

研究分野：整数論

キーワード：保型表現　保型形式　被覆群

１．　研究開始当初の背景

代数群の保型表現に関しては，古典群の保型表現の内視分類がアーサーによって解明され、大きな進歩を遂げた．内視分類においては保型表現はＡパラメーターで記述され、その重複度はアーサーの重複度公式で与えられる。しかし代数群の被覆群、たとえばメタプレクティック群の表現論についてはこの様な記述はまだ知られておらず、一般的にはほぼ未解明であった．とくに一番基本的と考えられるトーラスの被覆群の表現論ですらまだ一般的な記述ができていない．また，2次特殊線形群の被覆群の表現は志村対応により比較的よくわかっていたが，とくに２進素点における表現論に困難があり完全に記述されていなかった．このような点を解明するのが本研究課題の当初の目的であった．非アルキメデス的局所体上の 2 次形式のグロス・キーティング不変量は定義が 1990 年台に与えられて３次までの２次形式についてはかなり詳しいことがわかっており，数論幾何への著しい応用も知られていた．しかし，4次以上の２次形式については定義以上の情報は何もなく，一般的な性質はほぼ未解明であった．

また，ジーゲル保型形式およびエルミート保型形式については研究代表者が 2000 年代初頭に構成したリフティングが知られていたが、その手法はジーゲル・アイゼンシュタイン級数のフーリエ係数の公式を用いる大局的な手法であり，総実代数体上の保型形式に一般化するのは困難であった．

２．　研究の目的

代数群上の保型表現の定める不変超関数は一般には安定超関数にならないので，保型表現の重複度には主要項の他に補正項を考える必要がある。このために Langlands は内視群といわれる次元の小さな代数群を定義し，それを用いれば保型表現の重複度が記述できると考えた。こうして建設されたのが内視理論であり，現在では古典群に対してはほぼ確立しているといってよい段階にある。本研究課題ではメタプレクティック群などの被覆群に対して内視理論を構築することを目的とする。本研究課題が順調に進展すれば、将来的には被覆群上の保型表現と代数群上の保型表現の間の対応が証明される可能性があると思われる。一方、ジーゲルアイゼンシュタイン級数のフーリエ係数に現れるジーゲル級数についてはグロス・キーティング不変量による記述が望ましいと考えられたので、研究の初期段階でこちらの研究に重点を置くことにした．

３．　研究の方法

代数群の被覆群の保型表現論に関する研究を進めるため，多くの国際研究集会に参加し，研究成果の発表や最新の研究成果に関する討論を行った．たとえばオーバーヴォルファッハ研究所における研究集会（平成 26 年 4 月・ドイツ），Pan Asian Number Theory (平成 26 年 8 月・韓国)，Pan Asian Number Theory conference (平成 28 年 7 月・台湾）などに参加した．とくに２次形式のグロス・キーティング不変量の研究に力を注ぎ，この理論を４次以上の２次形式に対して拡張することに成功した．この成果を用いることによりジーゲル級数の明示公式を一般的な形で与えることに成功した．これは室蘭工業大学の桂田英典氏との共同研究である．また，京都大学の山名俊介氏と共同研究を行い，総実代数体上のシンプレクテシック群またはユニタリ群の保型形式へのリフティングを考察した．この研究においては本研究課題により購入したパソコンによる数値計算が重要な役割を果たした．

４．　研究成果

多変数のジーゲル・アイゼンシュタイン級数は整数または半整数の重さを持つ保型形式であり，とくに半整数の場合はシンプレクティック群の被覆群であるメタプレクティック群上の保型形式と考えられる．このような視点からジーゲル・アイゼンシュタイン級数のフーリエ係数の局所因子であるジーゲル級数を深く研究した．とくにジーゲル級数の一般的な関数等式を証明した．また室蘭工業大学の桂田英典氏との共同研究により，局所体上の２次形式のグロス・キーティング不変量の一般的性質を解明した．剰余標数が奇数の局所体上の場合はグロス・キーティング不変量はジョルダン分解を用いて簡単に記述されるが，2 進体上の 2 次形式の場合はグロス・キーティング不変量は非構成的な方法により定義されているのでその一般的性質を解明することには大きな困難があり，20 年以上放置されてきた問題であった．局所体Ｆ上の２次形式に対してグロス・キーティング不変量は以下のようにして定義される．Ｂを階数ｎの非退化２次形式とする．簡単のために対応する半整数対称行列もＢで表し，その(ij)成分を b_{ij} とする．このとき，非負整数の非減少列 a_i（$i=1,2,\cdots,n$）で，$2b_{ij}$ の位数≧$(a_i+a_j)/2$ となり，b_i の位数≧a_i となるようなもの全体をS(B)とする．さらに B' が B と同値な行列全体を走るときのS(B')全体の和集合を S({B})で表す．このとき S({B})は有限集合になることが知られている．非負整数の非減少列全体に辞書式順序でを入れて順序集合と考えた時の S({B})の最大限がＢのグロス・キーティング不変量でであり，この最大限がS(B)の元のときＢは最適形式であるという．この定義からわかるようにグロス・キーティング不変量は非構成的に定義されており，その計算は容易ではない．

本研究課題による研究成果として，グロス・キーティング不変量に関して次のような結果を得た．$D_B=(-4)^{[n/2]}\det B$ とおく．ここで$[n/2]$は $n/2$ を超えない最大の整数である．また$\Delta(B)$を次のように定義する．nが奇数のとき，あるいはnが偶数でFにD_Bの平方根を添加した体がF上不分岐のときには$\Delta(B)$はD_Bの位数とする．nが偶数でFにD_Bの平方根を添加した体がF上分岐するときには$\Delta(B)$はD_Bの位数から,FにD_Bの平方根を添加した体のF上の相対判別式の位数を引き，さらに1を加えたものとする．このとき，グロス・キーティング不変量$(a_1,\cdots,a_n)$の和 $a_1+\cdots+a_n$ は$\Delta(B)$に等しいという結果が得られた．さらに最適形式の間の同値を与える行列は，グロス・キーティング不変量によって定まる，F 上の一般線形群のあるコンパクト開部分群 $G_{(a_1,\cdots,a_n)}$に属することが証明できる．ここでF上の一般線形群の元gが$G_{(a_1,\cdots,a_n)}$に属するためにはa_jがa_iより真に大なるときgのij成分g_{ij}の位数$\geqq(a_j-a_i)/2$であることが必要十分である．

さらにグロス・キーティング不変量に関する理論を展開するには簡約形式を定義する必要がある．n 次対称群に属する対合σが非負整数の非減少列$(a_1,\cdots,a_n)$に関して許容的であるとは，$(a_1,\cdots,a_n)$に関して定まるある組み合わせ論的な条件を満たすこととする．このとき半整数対称行列 B が$(a_1,\cdots,a_n)$とσをGKタイプにもつ簡約形式であるとは，$\sigma(i)=j$ ならば $2b_{ij}$の位数が$(a_i+a_j)/2$であり，$a_{\sigma(i)}\leqq a_i$ならばb_i の位数が a_i に等しく，さらに$\sigma(i)=j$で $i\leqq j$ なるとき 2×2 対称行列$(b_{ii}, b_{ij}; b_{ji}, b_{jj})$のグロス・キーティング不変量が$(a_i, a_j)$に等しいことをいう．ここで$b_{ij}$は$B$の$ij$成分である． この条件は複雑に見えるが具体的に簡単な判定する方法が存在する．このとき，$(a_1,\cdots,a_n)$とσを GK タイプにもつ簡約形式はグロス・キーティング不変量$(a_1,\cdots,a_n)$の最適形式であることが証明できる．逆に，グロス・キーティング不変量が$(a_1,\cdots,a_n)$の最適形式Bは$G_{(a_1,\cdots,a_n)}$の元により最適形式に同値であることも証明できる．この定理を簡約定理という．これによりグロス・キーティング不変量の具体的な記述が可能になった．さらにこれらの結果を用いて，グロス・キーティング不変量を拡張した概念である拡張 GK データを定義し、その基本的性質を解明することができた．これら結果を用いてジーゲル級数の明示公式を得た．この明示公式は拡張 GK データと剰余体の位数のみで定まっているので従来の形の明示公式を統一的に扱うことが可能になった。これにより結果的に2進体の有限次拡大上の2次形式論が大きく進歩したものと思われる．とくに 2 進体上の2次形式の分類が，将来の研究により以前のものよりもさらに簡明な形で統一的に与えられる可能性があるものと思われる．このグロス・キーティング不変量は2元2 次形式の場合には特に簡明な記述が可能である.原始的な2×2半整数対称行列$(b_{11}, b_{12}; b_{12}, b_{22})$の同値類は，本質的には判別式$D_B$と導手だけで決定されるのであるが，この場合にはグロス・キーティング不変量はこれらのデータで完全に決定される．また，この場合のジーゲル級数は大塚により一般の標数0の局所体上で計算されているが，上記の結果はこれを拡張したものになっている．

また，京都大学の山名俊介氏との共同研究によりヒルベルト・ジーゲル保型形式またはエルミート保型形式のリフティングの理論を保型表現論的な方法により代数体上に拡張した．これは研究代表者が以前与えたジーゲル保型形式およびエルミート形式のリフティングの一般化になっている．とくに不分岐素点においてはリフティングのフーリエ係数はジーゲル級数を用いて表されるので，上記のグロス・キーティング不変量の研究とも密接な関係がある．さらにDII型のリフティングのみでなく，宮脇型のリフティングについても総実代数体上に拡張される．また、多くの数値計算を行い，これらのリフティングの数値的な実例を多数与えることに成功した．たとえば，有理数体に2の平方根を添加した体上では階数8の正定値偶ユニモジュラー形式の同値類は6個存在するということが知られていたが，この6個の同値類によって生成されるベクトル空間にはクネザーの近傍作用素という作用素が作用する．この近傍作用素は対応する直交群上のヘッケ作用素と考えることができる．このヘッケ作用素の固有値は計算機を用いることにより具体的に計算することができる．また，このベクトル空間の元に対して自然に定義されるテータ関数はヒルベルト・ジーゲル保型形式となるが，上記のヘッケ作用素の固有ベクトルから得られるテータ関数はヒルベルト・ジーゲル保型形式としてもヘッケ作用素の同時固有形式となる．この固有値を具体的に計算することにより,6個の固有ベクトルに対して，それから得られるテータ関数がすべて上記のリフティングを用いて記述できることが確かめられる．とくにこの同時固有形式のうち一つはジーゲル・アイゼンシュタイン級数であり，2 つは互いに共役な斎藤・黒川リフト（すなわち2次のDII リフト）である．さらに残りの二つは4次の DII リフトと，3次の宮脇型リフトである．とくに最後の2つの実例は有理数体以外の総実代数体上の3次以上のヒルベルト・ジーゲル・カスプ形式でヘッケ作用素の固有値が計算された数少ない例であると思われる．また，DII リフトはフーリエ係数が具体的に計算できるのでその意味でもこの実例は興味深いものであると思われる．DII リフトのフーリエ係数を計算するためには半整数重さを持つヒルベルト

保型形式に対するコーネン・プラス空間の研究が必要である．これはξ番目のフーリエ係数が消えないためにはξが4を法として平方数であるという条件を満たすようなヒルベルト保型形式からなる空間であり，志村対応により整数の重さを持つレベル1のヒルベルト保型形式の空間と自然な対応がある．本研究課題ではコーネン・プラス空間の構成を跡公式を直接求める方法により証明することに関しても部分的結果を得た．

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計2件）

1. T.Ikeda and H.Katsurada,
"On the Gross-Keating invariant of a quadratic form over a non-archimedean local field", 査読有
To appear in Amer. J. Math.

2. T.Ikeda,
"On the functional equation of the Siegel series", 査読有
J. Number Theory 172 (2017), 44-62.

〔学会発表〕（計7件）

1. Tamotsu Ikeda,
"Kohnen plus space for Hilbert modular forms",
International conference for the 70th anniversary of Korean Mathematical Society, 2016 KMS Annual Meeting
2016年10月22日,
ソウル大学（韓国）

2. Tamotsu Ikeda
"On the Gross-Keating invariant of a quadratic form over a non-archimedean local field of characteristic zero and its application to Siegel series",
Pan Asia Number Theory Conference 2016,
2016年7月12日,
台湾国立大学（台湾）

3. 池田保・桂田英典
"Explicit formula for the Siegel series of a quadratic form over non-archimedean local field",
保型形式・保型的L関数とその周辺
2016年2月5日,
京都大学数理解析研究所（京都府）

4. 池田保
"非アルキメデス的局所体上の 2 次形式の Gross-Keating 不変量について",
数論合同セミナー,
2015年6月5日,
京都大学（京都府）

5. Tamotsu Ikeda
"On the Gross-Keating invariant of a quadratic form and its application",
Modular forms and automorphic representations,
2015年2月6日,
京都大学数理解析研究所（京都府）

6. 池田保
"代数群と被覆群の保型表現", 第59回代数学シンポジウム,
2014年9月10日,
東京大学大学院理学研究科（東京都）

7. 池田保
"PV and Siegel series",
Prehomogeneous vector spaces and related topics,
2014年9月4日,
立教大学マキムホール（東京都）

〔図書〕（計0件）

〔産業財産権〕

○出願状況（計0件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

○取得状況（計0件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等
https://www.math.kyoto-u.ac.jp/~ikeda/

６．研究組織
(1)研究代表者
池田　保（IKEDA, Tamotsu）
京都大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号：20211716

(2)研究分担者
( )

研究者番号：

(3)連携研究者
平賀　郁 (HIRAGA, Kaoru)
京都大学・大学院理学研究科・講師
研究者番号：10260605

(4)研究協力者
( )