

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 29 年 5 月 28 日現在

機関番号：14401

研究種目：挑戦的萌芽研究

研究期間：2014～2016

課題番号：26610008

研究課題名(和文)ミラー対称性における非可換ホッジ構造の研究

研究課題名(英文)Study of noncommutative Hodge structures in mirror symmetry

研究代表者

高橋 篤史(Takahashi, Atsushi)

大阪大学・理学研究科・教授

研究者番号：50314290

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,800,000円

研究成果の概要(和文)：シンプレクティック幾何学と複素代数幾何学という、一見全く無関係に思える数学が自分と鏡像の関係のように一体的に表れるという現象があり、ミラー対称性と呼ばれている。本研究はミラー対称性における非可換ホッジ構造の理論を深め、関連する諸課題の解決を目指した。

本研究の成果として、例えば次のものがあげられる。群作用付行列因子化の圏に対する非可換ホッジ構造をもとに、オービフォールドヤコビ環の定式化およびその存在と一意性を示した。また、滑らかで射影的な代数多様体上の連接層の導来圏の自己関手のエントロピーについての基礎研究を行い、グロモフ-ヨムディン型定理がある種の代数多様体について成立することを示した。

研究成果の概要(英文)：Mirror symmetry is a symmetry which interchanges the role of the symplectic geometry and complex algebraic geometry. The purpose of this research is a trial for a deep understanding of the non-commutative Hodge theory in the theory of the mirror symmetry and for a solution to important problems in related areas.

The following are examples of our research results. Motivated by the non-commutative Hodge theory for categories of matrix factorizations, we proposed a set of axioms for orbifold Jacobian algebras, and we proved the existence and the uniqueness of them. We have also been studying the entropy of endo-functors on derived categories of coherent sheaves on smooth projective varieties and show the Gromov-Yomdin type theorem for some varieties.

研究分野：複素幾何学・数理物理学

キーワード：代数学 幾何学 数理物理学 ミラー対称性

1. 研究開始当初の背景

ミラー対称性とは、シンプレクティック幾何学に対応する A 模型と複素代数幾何学に対応する B 模型という、二つの位相的弦理論の等価性である。ミラー対称性は定性的・定量的なさまざまな予想を与え、これまで個別に研究されてきた数学を結び付けるので極めて興味深い。

ホモロジー的ミラー対称性の帰結として、古典的ミラー対称性(グロモフ ウィッテン不変量の理論とホッジ構造の変形理論の関係)が函数的に得られると期待される。そこで、 dg 圏から函数的にホッジ理論および平坦(フロベニウス)構造を構成することが課題となった。変形理論に基づくものは非可換ホッジ理論と呼ばれ活発に研究されている。

しかしながら、研究開始時点以前では、圏の平坦変形を司ると期待される変形空間の基本構造を記述するにとどまっていた。このため、平坦構造を得ることができず、ホモロジー的ミラー対称性から古典的ミラー対称性を導く計画は暗礁に乗り上げかかっていた。これは、あるホモトピー代数に対する形式性予想(formality conjecture)の証明がなされていないことと非可換ホッジ理論の偏極が構成されていないことが原因であった。さらに、整構造はもちろんのこと、実構造も欠落しているため、カラビ ヤウ dg 圏に対する原始形式の周期写像の理論を構築することができない状態であった。

また、分担者入谷寛は、グロモフ ウィッテン不変量の理論に対して整構造付きホッジ構造の変形理論を展開していた。分担者小西由紀子は、ホッジ構造から混合ホッジ構造への一般化に着想を得て混合平坦構造を定義し、局所ミラー対称性の研究に応用していた。

2. 研究の目的

本挑戦的萌芽研究の目的は、 dg 圏に対する非可換ホッジ理論・原始形式・平坦構造の函数的構成という、ホモロジー的ミラー対称性の理論における極めて重要な問題の解決に向けての活路を探究することである。

非可換ホッジ構造の原型であるホッジ理論と周期写像の理論を展開するには、複素ベクトル空間・フィルター構造・重み・整構造・偏極が必要である。しかし、非可換ホッジ理論には整構造・偏極が構成されておらず、未完成である。一方、原始形式の構成には光明が差してきた。

本研究では、整構造と偏極の基礎理論を構築し、カラビヤウ dg 圏に対して非可換ホッジ構造を函数的に構成することを具体的目標とする。ホモロジー的ミラー対称性の帰結として、古典的ミラー対称性(グロモフ ウィッテン不変量の理論とホッジ構造の変形理論の関係)を函数的に導くという問題の解決を目指す。

3. 研究の方法

(1)平成 26 年度では、主として非可換ホッジ構造の偏極の構成を目指した基礎研究を行うこととした。代数閉体上コンパクトで滑らかな dg 圏に対して、ホッホシルトホモロジー群上に非退化で次数付き対称な双線型形式を構成すること、を目標に研究を行った。また、代数閉体上のカラビ ヤウ dg 圏の場合に、ホッホシルトコホモロジー群上から誘導されるものとの比較を行い、定数倍を除いてそれが一意的に定まることを示すことも目標とした。

(2)平成 27 年度では、主として非可換ホッジ構造の偏極および整構造の構成を目指した研究を行うこととした。具体的には、ホッジ ド・ラムの退化が成立するような代数閉体上のコンパクトで滑らかな dg 圏に対して、周期的巡回ホモロジー群(より正確にはこれと形式性予想により同型となるもの)上に高次剰余形式を構成すること、量子コホモロジーにおける整構造の諸問題の解決、混合非可換ホッジ構造の定式化、についての研究を行うこととした。

(3)平成 28 年度では、非可換ホッジ構造のさらなる理解のため、前年度に開始した導来圏の自己関手のエントロピーの研究やオービフォルドヤコビ環の研究に取り組むこととした。とくに、これらについての基本定理の定式化と証明が重要課題であった。また、量子コホモロジーにおける整構造の諸問題や、複素鏡映群の軌道空間上の非可換混合ホッジ構造の解析にも引き続き取り組むこととした。

(4)ミラー対称性に関するセミナー・勉強会・国際研究集会を定期的開催し、関連分野の研究者による最新の研究成果についての講演をもとに参加者たちと議論し、研究発信・研究交流を積極的に行い、本研究を促進するだけでなく、当該研究分野の活性化を行う。

4. 研究成果

(1)平成 26 年度では、主として非可換ホッジ構造の偏極の構成を目指した基礎研究を行った。代数閉体上のカラビ ヤウ dg 圏のホッホシルトホモロジー群上に、非退化で次数付き対称な双線型形式でカラビ ヤウ構造の取り方によらないものが自然に構成されることがわかった。これは、ホッホシルトコホモロジー群上にセール双対性から導かれるものと定数倍を除いて同じものを定める。この構成をもとに、高次剰余形式の構成に取り組み始める。

(2)平成 27 年度では、前年度に取りまとめた論文「From Calabi-Yau dg Categories to Frobenius manifolds via Primitive Forms」

における研究成果を積極的に発信・研究交流することにより、今後の研究展開の検討を行った。とくに、群作用付き行列因子化との関連から、オービフォルドヤコビ環の研究に着手することとなった。一方、導来圏の安定性条件の空間に入ると期待される平坦構造の研究と関連して、自己関手のエントロピーの研究にも着手することとなった。研究分担者入谷寛は、量子コホモロジーと端転移との関係性を調べることで、特異点の平滑化の量子コホモロジーが特異点の解消の量子コホモロジーの部分賞としてあらわされることを見出した。研究分担者小西由紀子は、複素鏡映群の軌道空間上における非可換混合ホッジ構造の研究を行った。

(3) 平成 28 年度では、主として導来圏の自己同値関手についてのエントロピーの研究、オービフォルドヤコビ環の研究に取り組んだ。グロモフ ヨムディン型予想を定式化しその解決を目指して基礎研究を行った。現在ではこの予想が一般には成立しないということが判明しているが、他の研究者たちが興味を持って取り組むような、当該研究分野の先駆けとなる研究成果を複数得たことは重要である。オービフォルドヤコビ環についてもその定式化を行い、存在と一意性を証明することができた。とくに、幾何学的な背景から期待される、いくつかのオービフォルドヤコビ環の間にある同型についても証明できており、これが定式化の正しさを裏付けている。研究分担者入谷寛は Coates・Corti・Tseng との共同研究においてトーリック軌道体に対するミラー対称性の研究を進め、ホッジ理論的ミラー対称性を一般的な設定で証明した。研究分担者小西由紀子は非可換混合ホッジ構造の概双対性と複素鏡映群の軌道空間上の非可換混合ホッジ構造について研究し、その構造を完全に決定した。

(4) 研究分担者入谷寛・小西由紀子とともに、定期的にセミナー・勉強会を開催した。また、平成 26 年度は国際研究集会「Primitive forms, Mirror Symmetry and Related Topics」を、平成 27 年度は国際研究集会「Mirror Symmetry and Algebraic Geometry 2015」を、平成 28 年度は国際研究集会「Mirror Symmetry and Related Topics, Kyoto 2016」を開催した。関連する分野における研究者による最新の研究成果についての講演をもとに、参加者たちと活発な研究交流を行った。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

〔雑誌論文〕(計 4 件)

Wolfgang Ebeling, Atsushi Takahashi, Strange duality between hypersurface and complete intersection

singularities, *Arnold Journal of Mathematics* 2 (2016), 277-298. doi:10.1007/s40598-016-0044-8, 査読有

Hiroshi Iritani, Jifu Xiao, Extremal transition and quantum cohomology: Examples of toric degeneration, *Kyoto J. Math.* 56 (2016) 873-905, doi:10.1215/21562261-3664959, 査読有

Sergey Galkin, Vasily Golyshev, Hiroshi Iritani, Gamma classes and quantum cohomology of Fano manifolds: Gamma Conjectures, *Duke Math. J.* 165 (2016) 2005-2077, doi: 10.1215/00127094-3476593, 査読有

〔学会発表〕(計 12 件)

Atsushi Takahashi, Orbifold Jacobian algebras for invertible polynomials, Categorical and Analytic invariants in Algebraic geometry 4, 東京大学国際高等研究所数物連携宇宙研究機構(千葉県・柏市), 2016 年 11 月 17 日

Atsushi Takahashi, On entropy of autoequivalences of projective varieties, Categorical and Analytic invariants in Algebraic geometry 3, Steklov Mathematical Institute, Moscow (RUSSIA), 2016 年 9 月 17 日

Hiroshi Iritani, On the Gamma conjectures associated to toric flips, Workshop on Homological Mirror Symmetry: Methods and Structures, Institute for Advanced Studies, Princeton (USA), 2016 年 11 月 17 日

小西由紀子, 齋藤構造の双対性と複素鏡映群への応用, 第 4 回 K 3 曲面・エンリケス曲面ワークショップ, 北海道教育大学札幌駅前サテライト(北海道・札幌市), 2016 年 10 月 10 日

Atsushi Takahashi, From Calabi-Yau dg Categories to Frobenius manifolds via Primitive Forms, String field theory of B-model, Center for Geometry and Physics, Pohang (KOREA), 2016 年 1 月 9 日

Atsushi Takahashi, From Calabi-Yau dg Categories to Frobenius manifolds via Primitive Forms, Categorical and Analytic invariants in Algebraic geometry 1, Steklov Mathematical Institute, Moscow (RUSSIA), 2015 年 9 月 17 日

6. 研究組織

(1) 研究代表者

高橋 篤史 (TAKAHASHI, Atsushi)
大阪大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号: 50314290

(2)研究分担者

入谷 寛 (IRITANI, Hiroshi)
京都大学・大学院理学研究科・准教授
研究者番号：20448400

小西 由紀子 (KONISHI, Yukiko)
京都大学・大学院理学研究科・准教授
研究者番号：30505649